FORTALEZCO MIS COMPETENCIAS 3

Matemáticas

David Mata Ríos / Claudio Francisco Nebbia Rubio

Secundaria
3er grado

Dirección de contenidos y servicios educativos	Elisa Bonilla Rius
Gerencia de publicaciones escolares	Felipe Ricardo Valdez González
Autores	David Mata Ríos/Claudio Francisco Nebbia Rubio
Colaboradores	Saúl David Bañuelos/Kenya Verónica Espinosa Hurtado/Emilio Domínguez Bravo
	Acenet Minerva del Real Martínez/Jesús Alejandro Anguiano Pérez
	Adriana Barenca Escobar
Coordinación editorial	Ernesto Manuel Espinosa Asuar
Edición	Citlali Yacapantli Servín Martínez/Uriel Jiménez Herrera/Cristóbal Bravo Marván
Revisión técnica de evaluaciones	Instituto de Evaluación y Asesoramiento Educativo (IDEA)
Coordinación de corrección	Abdel López Cruz
Corrección	Juana Moreno Armendáriz/Laura Martínez García
Dirección de arte	Quetzatl León Calixto
Diseño de portada	José Manuel Calvillo Torices
Coordinación de diagramación	César Leyva Acosta
Diagramación	César Leyva Acosta/Maricarmen Martínez Muñoz/Gabriela Álvarez Aguirre
Coordinación de iconografía e imagen	Ricardo Tapia García
Iconografía	Alejandra Amador/Abril García Mercado/Ilia Muñoz
Fotografía	© 2013, Carlos A. Vargas/© Thinkstock 2013/ © Archivo SM 2013
Digitalización y retoque	Carlos López
Producción	Carlos Olvera, Víctor Canto, Lilia Alarcón

Fortalezco mis competencias.
Matemáticas 3. Secundaria
Primera edición, 2013
Segunda reimpresión, 2016
D. R. © SM de Ediciones, S. A. de C. V., 2013
Magdalena 211, Colonia del Valle,
03100, Ciudad de México.
Tel.: (55) 1087 8400
www.ediciones-sm.com.mx

ISBN 978-607-24-1017-6

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro número 2830

Presentación

Nuestro mundo en constante cambio, tanto en lo social como en lo tecnológico, requiere que los jóvenes se preparen y participen de forma activa en su comunidad. La resolución de problemas es fundamental para que una persona supere los retos que se le presenten, desarrolle nuevas estrategias para solucionarlos a partir de lo que ya sabe y consolide su pensamiento lógico-matemático; por lo tanto, no sólo se espera que identifiquen las situaciones en las que intervienen las matemáticas, sino también que las comprendan.

Fortalezco mis competencias. Matemáticas 3 brinda la oportunidad de desarrollar y consolidar estos aprendizajes para responder a los desafíos venideros.

Presentación para el alumno

¡Bienvenido al tercer grado de secundaria! Al estudiar y aprender matemáticas estarás preparándote para afrontar los retos que la vida te presentará cada día.

El principal propósito de esta obra es que, por medio de situaciones problemáticas atractivas, desarrolles formas de pensar que te permitan consolidar tus estrategias de solución, así como formular conjeturas y explicaciones, por ejemplo, modelando dichas situaciones mediante el lenguaje algebraico.

Al resolver los problemas planteados, podrás integrar y aplicar las matemáticas en situaciones cercanas a ti, desarrollar habilidades de cálculo mental, estimar resultados, justificar propiedades de las figuras geométricas, comunicar información y, más allá de la escuela, comprender el papel que desempeña la matemática en el mundo.

El aprendizaje de las matemáticas depende de tu disposición e interés para aprovechar esta rama del saber que te brindará elementos para ser un ciudadano reflexivo, tomar decisiones y formular juicios bien fundamentados, confiando en tus conocimientos. Proponte tener la mejor actitud para desarrollar las actividades, participar activamente en la búsqueda de la mejor manera de resolverlas y discutir con tus compañeros acerca de los procedimientos empleados.

Te deseamos éxito en tus estudios y en tu vida.

Fortalezco mis competencias consta de 33 secuencias didácticas organizadas en cinco bloques.

Entrada de bloque

Número de bloque

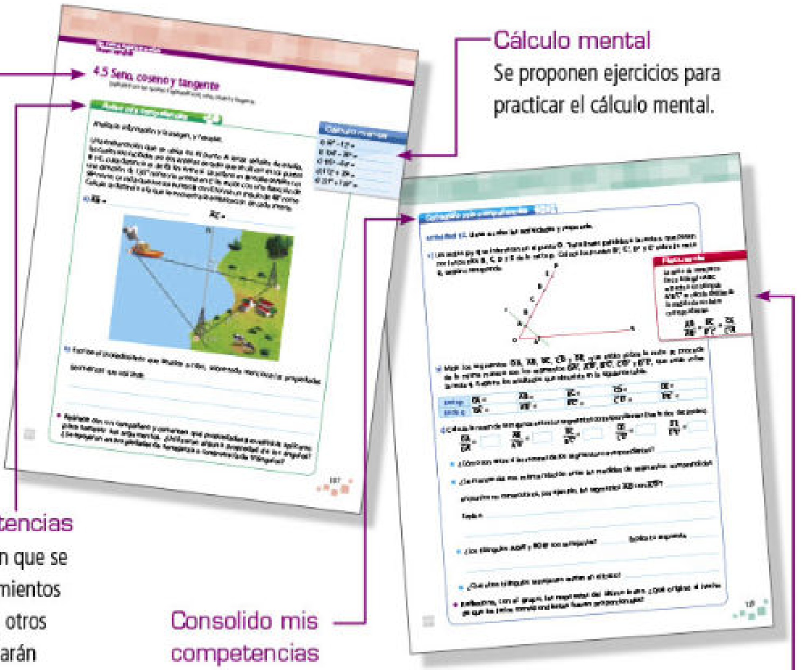
Aprendizajes esperados
Se indican los aprendizajes que alcanzarás en el bloque.

Frase célebre
Con este pensamiento sobre las matemáticas se te invita a la reflexión.

Los contenidos se desarrollan en secuencias didácticas. Cada una contiene los siguientes apartados.

Secuencia
Se indican el número y título de la secuencia; además, se muestran el eje, tema y contenido que se trabajará.

Cálculo mental
Se proponen ejercicios para practicar el cálculo mental.

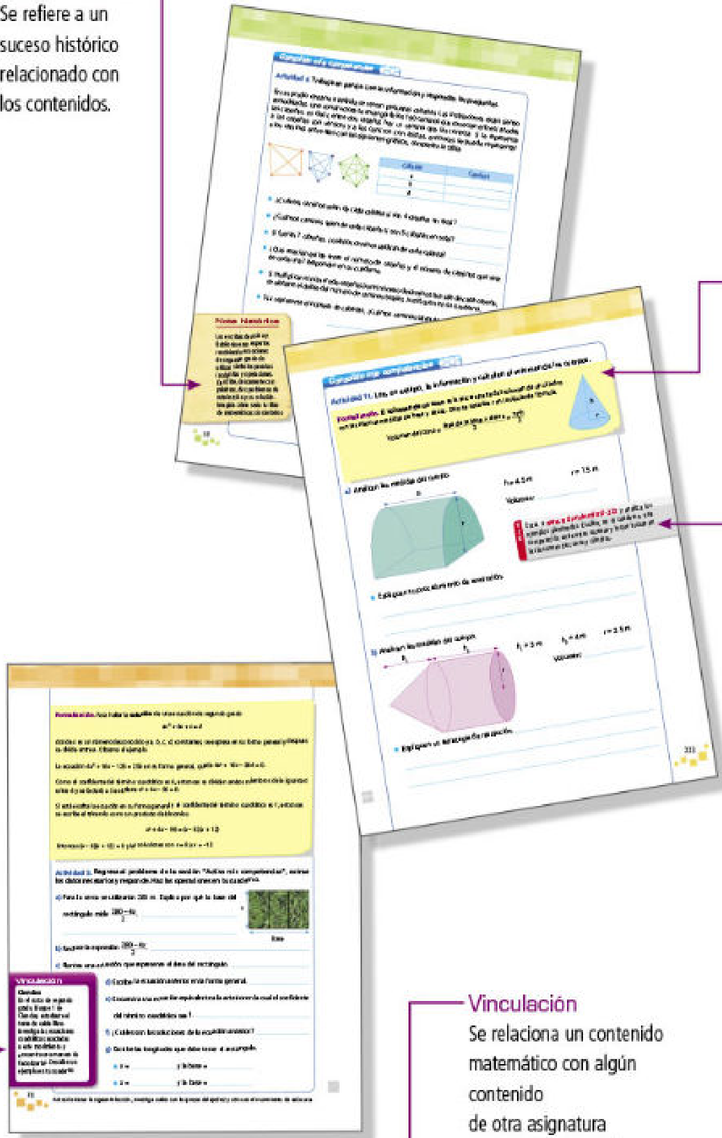


Activo mis competencias
Se plantea una situación que se resuelve con los conocimientos previos y se vincula con otros nuevos que se desarrollarán en la lección.

Consolido mis competencias
Se proponen actividades para la adquisición de conocimientos, habilidades, valores y actitudes.

Cápsula informativa
Se brinda información sobre los conceptos matemáticos relevantes para el contenido. Puede ser "Observa", "Reflexiona", "Recuerda" o "¿Sabías que…?".

Nota histórica
Se refiere a un suceso histórico relacionado con los contenidos.



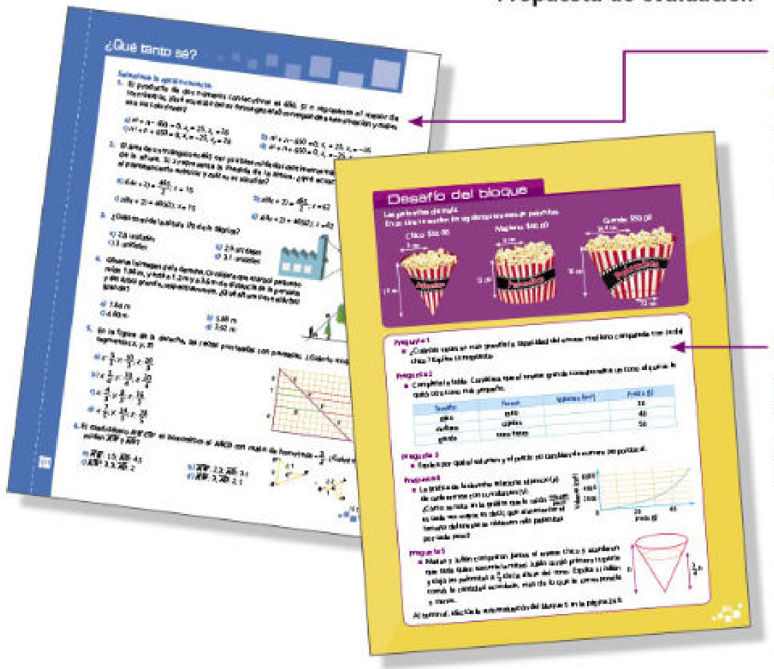
Formalización
Se presentan definiciones de conceptos o procedimientos trabajados en la secuencia.
Algunos de estos conceptos están resaltados.

Competencias TIC
Se proponen referencias a vínculos *web* con recursos para consolidar los aprendizajes.
Se revisó la vigencia de los vínculos del 23 al 24 de enero de 2017.

Vinculación
Se relaciona un contenido matemático con algún contenido de otra asignatura o un contexto cotidiano.

7092090119130_001-013-CS6.indd 5 26/01/17 1:33 p.m.

Propuesta de evaluación



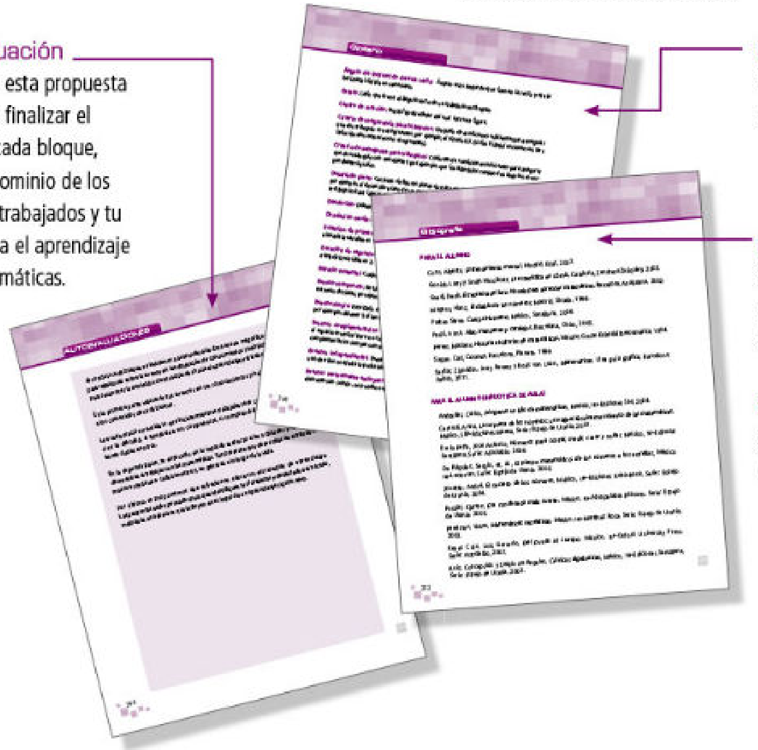
Evaluación con reactivos de opción múltiple

Se proporciona una evaluación de los contenidos del bloque, recortable.

Evaluación con reactivos tipo PISA

Se plantea esta forma de evaluación para desarrollar las competencias matemáticas.

Secciones al final del libro



Autoevaluación

Se presenta esta propuesta para que, al finalizar el trabajo en cada bloque, valores tu dominio de los contenidos trabajados y tu actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas.

Glosario

Se definen algunos términos utilizados en el libro.

Bibliografía para el alumno

Se sugieren lecturas y páginas *web* para profundizar en los contenidos del libro.

Bibliografía para el profesor

Se recomiendan lecturas y páginas *web* con recursos para el profesor.

Si bien hoy en día los propósitos educativos se centran en el alumno, la labor del docente representa un factor clave, porque es el responsable de generar situaciones didácticas, con la finalidad de que los alumnos asuman su aprendizaje como un acto pleno de sentido que les ayude al desarrollo y crecimiento personal, en lugar de ser contenidos aislados que sólo cobran vida dentro del aula.

En la educación secundaria se espera que al aprender matemáticas los estudiantes desarrollen las siguientes competencias:

- resolver problemas de manera autónoma,
- comunicar información matemática,
- validar procedimientos y resultados, y
- manejar técnicas eficientemente.

Las actividades propuestas se diseñaron para propiciar en ellos el desarrollo de estas competencias matemáticas, de tal suerte que alcancen el aprendizaje de las ideas principales sobre una base conceptual y adquirida de forma significativa. En la sección **Activo mis competencias** se ofrece una situación problemática con la que se activan los conocimientos previos para coadyuvar al desarrollo de los conocimientos y habilidades del apartado **Consolido mis competencias**.

Asimismo, se promueve el trabajo individual, en equipo y en grupo, ya que la interacción fortalece en el alumnado la responsabilidad y la motivación para seguir aprendiendo. En distintos momentos los jóvenes se encargarán de validar sus respuestas, por medio de la discusión matemática y con base tanto en los argumentos como en los procedimientos llevados a cabo durante la resolución de problemas.

Al inicio de cada lección se encuentra una cápsula de **Cálculo mental**. Se recomienda considerarla una oportunidad para que los estudiantes consoliden su competencia numérica al practicar sus estrategias, a la vez que adquieren confianza en sus habilidades operativas. Cuando sea conveniente, invítelos a compartir sus estrategias, brindándoles la oportunidad de aprender de sus compañeros o guiándolos para el eficiente manejo de técnicas personales y formales.

Con el propósito de que los alumnos interioricen actitudes positivas hacia lo que aprenden se diseñaron las cápsulas informativas **Reflexiona**, **Observa** o **¿Sabías que…?**, que enlazan lo presentado en la secuencia con otros aspectos interesantes de las matemáticas; mientras que **Notas históricas** y **Vinculación** relacionan esta ciencia con aspectos de su entorno y con otras asignaturas de la secundaria, para promover una cultura matemática. Además, para contribuir al desarrollo de habilidades digitales para todos, se sugieren referencias a vínculos web en las cápsulas **TIC**. Las páginas electrónicas recomendadas se consultaron entre el 10 y el 17 de noviembre de 2013.

Proponemos dos alternativas como apoyo a la evaluación: **¿Qué tanto sé?**, con preguntas de opción múltiple, y **Desafío del bloque**, con preguntas tipo PISA. También presentamos una propuesta de **Autoevaluación** por bloque.

Esperamos que encuentre en este libro una guía y un apoyo para su labor docente, que comparta a los estudiantes una visión viva de las matemáticas, como una ciencia en construcción que les ayuda a comprender y explicar su entorno, y que, por sí misma, es emocionante conocer.

BLOQUES	SEMANAS 1	2	3	4
1	1.1 Ecuaciones cuadráticas sencillas (páginas 15-20)	1.2 Figuras semejantes y congruentes (páginas 21-28)	1.3 Criterios de congruencia y semejanza (páginas 29-36)	1.3 Criterios de congruencia y semejanza (páginas 29-36) 1.4 Gráficas, tablas y expresiones algebraicas (páginas 37-44)
2	2.1 Ecuaciones cuadráticas (páginas 69-78)	2.2 Transformaciones en el plano (páginas 79-86)	2.3 Figuras simétricas (páginas 87-92)	2.4 La medida de los lados de un triángulo (páginas 93-96)
3	3.1 Problemas mediante ecuaciones cuadráticas (páginas 113-120)	3.2 Problemas de criterios de congruencia y semejanza (páginas 121-126)	3.3 Teorema de Tales (páginas 127-132)	3.4 Figuras homotéticas (páginas 133-140)
4	4.1 Sucesiones con regla general cuadrática (páginas 165-170)	4.2 Sólidos de revolución (páginas 171-178)	4.3 La pendiente (páginas 179-182)	4.4 Razones trigonométricas (páginas 183-186)
5	5.1 Formulación de problemas a partir de una ecuación (páginas 209-214)	5.2 Cortes en cilindros y conos rectos (páginas 215-218)	5.3 Volumen de cilindros y conos rectos (páginas 219-224)	5.4 Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos rectos (páginas 225-230)

BLOQUES	SEMANAS 5	6	7	8	9
1	1.4 Gráficas, tablas y expresiones algebraicas (páginas 37-44)	1.5 Relaciones de variación cuadrática (páginas 45-50)	1.6 Conocimiento de la escala de la probabilidad (páginas 51-58)	1.7 Datos, poblaciones y encuestas (páginas 59-64)	¿Qué tanto sé? Desafío de bloque (páginas 65-67) Autoevaluación (página 245)
2	2.5 Teorema de Pitágoras (páginas 97-102)	2.6 La regla de la suma (páginas 103-108)	¿Qué tanto sé? Desafío de bloque (páginas 109-111) Autoevaluación (página 246)		
3	3.4 Figuras homotéticas (páginas 133-140) 3.5 Gráficas de funciones cuadráticas (páginas 141 – 148)	3.5 Gráficas de funciones cuadráticas (páginas 141-148)	3.6 Gráficas por secciones rectas y curvas (páginas 149-154)	3.7 Regla del producto (páginas 155-160)	¿Qué tanto sé? Desafío de bloque (páginas 161-163) Autoevaluación (página 247)
4	4.5 Seno, coseno y tangente (páginas 187-192)	4.6 Razón de cambio (páginas 193-198)	4.7 Desviación media y rango (páginas 199-204)	¿Qué tanto sé? Desafío de bloque (páginas 205-207) Autoevaluación (página 248)	
5	5.5 Variación lineal o cuadrática (páginas 231-234)	5.6 Juegos de azar justos (páginas 235-240)	¿Qué tanto sé? Desafío de bloque (páginas 241-243) Autoevaluación (página 249)		

BLOQUE 1

Aprendizajes esperados

El estudiante:

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto a tu curiosidad y trae a juego tus facultades inventivas, y si lo resuelves por tus propios métodos, puedes experimentar la tensión y disfrutar del triunfo del descubrimiento.

George Pólya

1.1 Ecuaciones cuadráticas sencillas

Resuelvo problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

Cálculo mental

a) $6^2 =$ ______

b) $11^2 =$ ______

c) $(-3)^2 =$ ______

d) $(-1)^2 =$ ______

e) $(-6)^2 =$ ______

Activo mis competencias

En una clase de repostería se prepararán galletas para celebrar el fin de cursos. Cada alumno cocinará una galleta para él mismo, una para cada miembro de la clase y una para el profesor, quien no cocinará, sólo los supervisará. En total se harán 210 galletas para el grupo, contando al profesor, y se repartirán en bolsas con cantidades iguales entre los alumnos y el profesor.

a) ¿Cuántas bolsas de galletas se repartirán? ______

b) ¿Cuántas galletas tendrá cada bolsa? ______

c) Explica, en tu cuaderno, el procedimiento que usaste para contestar las preguntas.

d) ¿Qué relación existe entre el número de galletas en cada bolsa y el número de alumnos?

______

e) ¿Qué relación existe entre el número de bolsas y el número de alumnos?

______

f) Si cada alumno sólo prepara una galleta para él y una para cada compañero, es decir, no preparara para el profesor, y hubiera de todos modos 210 galletas, ¿cuántos alumnos habría en el grupo? Explica cómo obtuviste el resultado.

______

g) ¿Tiene sentido la respuesta del inciso anterior? Justifica tus respuestas en el cuaderno.

h) Indica dos ejemplos posibles del número de galletas y el número de alumnos para la situación en que los alumnos sólo preparan una galleta para ellos y una para cada uno de sus compañeros.

______

- **Comenta tus respuestas con los demás compañeros. Reflexionen sobre su respuesta del inciso e) y digan si existe alguna relación con el procedimiento que explicaron en el inciso c). Discutan cómo mejorar sus procedimientos.**

Consolido mis competencias

Actividad 1. Trabaja en pareja. Lean la información y respondan. En cada caso, expliquen su procedimiento para encontrar la respuesta. Empleen las propiedades del inverso aditivo y el inverso multiplicativo. Si es necesario utilicen calculadora.

a) Un número que multiplicado por sí mismo dé como resultado 121. ______________

Procedimiento: ______________

b) Un número que al multiplicarlo por sí mismo y sumar 4 al resultado se obtiene 104. ______________

Procedimiento: ______________

Recuerda

Un número que se multiplica por sí mismo se dice que está al cuadrado y se representa como $a \times a = a^2$. También se dice "un número elevado al cuadrado" o "el cuadrado de un número".

- **Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Expliquen por qué obtienen dos soluciones.**

c) El cuadrado de un número más el mismo número es igual a 20.

- Elaboren una tabla en su cuaderno; prueben distintos valores hasta encontrar el resultado, como se muestra en el ejemplo.

El cuadrado de un número	El mismo número	Su suma	Resultado
2^2	2	$2^2 + 2$	6

- ¿Encontraron también el número negativo que resuelve el problema anterior? ¿Cuál es? De ser necesario, usen la misma tabla para evaluar números negativos.
- Escriban la ecuación que modela el problema y su solución. ______________

____

d) El producto de dos números positivos consecutivos es 9 900. ¿Qué números son? ______________

______________ Describan su procedimiento en el cuaderno.

e) ¿Existirán dos números negativos consecutivos que al multiplicarlos den 9 900? ______

Justifiquen su respuesta. ______________

- **Comparen sus respuestas con las del grupo. Compartan sus reflexiones sobre los diferentes procedimientos que utilizaron para resolver esta actividad y en qué casos les conviene emplearlos.**

Consolido mis competencias

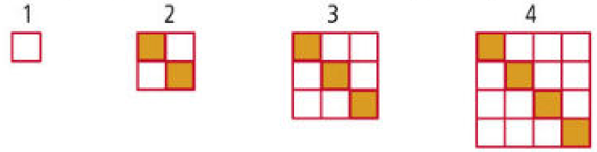
Actividad 2. Trabaja en equipo. Lean la información y respondan. Utilicen calculadora en caso necesario.

TIC Entra a www.redir.mx/matfort3-017, analiza la información y haz las actividades propuestas. Compara tus respuestas con las de las de un compañero, mencionen si es necesario usar sólo la variable x en las ecuaciones.

a) El cuadrado de un número menos ese mismo número es igual a 42.

Ecuación: ______________ Solución: ______________

b) Observen el patrón de los mosaicos blancos y naranjas.



- ¿Cuántos mosaicos blancos habrá en la figura 5? ______________
- ¿Y en la décima? ______________
- Encuentren una expresión para indicar cuántos cuadrados naranjas habrá en la figura x.
- ¿En qué figura habrá 42 cuadrados? ________ Justifiquen su respuesta en el cuaderno.

- **Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Comenten, entre todos, lo siguiente. ¿Se puede escribir una ecuación de diferentes maneras y obtener la misma solución? ¿Una ecuación puede representar distintos problemas? Justifiquen y argumenten sus razones.**

Actividad 3. Trabaja en equipo. Lean la información. Escriban entre todos una definición de una ecuación de segundo grado.

Formalización. Una **ecuación de segundo grado** o **cuadrática** se escribe generalmente como

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde x es el número desconocido y a, b, c representan números constantes.

Algunos ejemplos de ecuaciones de segundo grado son los siguientes.

- $4x^2 - 4x - 48 = 0$
- $x^2 - 4 = 0$
- $x^2 - 2x - 24 = 0$
- $x^2 + 7x = 0$

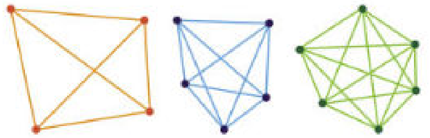
Para resolver una ecuación cuadrática muchas veces se utiliza la siguiente propiedad.

Al elevar un número positivo al cuadrado y aplicar la raíz cuadrada al resultado, se obtiene nuevamente el mismo número positivo (por ejemplo, $5^2 = 25$ y $\sqrt{25} = 5$).

Consolido mis competencias

Actividad 4. Trabaja en pareja. Lean la información y respondan las preguntas.

En un predio cercano a Mérida se rentan pequeñas cabañas. Las instalaciones están siendo remodeladas. Una constructora se encargó de los 190 caminos que conectan entre sí a todas las cabañas, es decir, entre dos cabañas hay un camino que las conecta. Si se representa a las cabañas con vértices y a los caminos con aristas, entonces se puede representar a los caminos entre ellas con los siguientes gráficos; completen la tabla.



Cabañas	Caminos
4	
5	
6	

a? ¿Cuántos caminos salen de cada cabaña si son 4 cabañas en total? ______

b) ¿Cuántos caminos salen de cada cabaña si son 5 cabañas en total? ______

c) Si fueran 7 cabañas, ¿cuántos caminos saldrían de cada cabaña? ______

d) ¿Qué relación existe entre el número de cabañas y el número de caminos que sale de cada una? Respondan en su cuaderno.

e) Si multiplican el número de cabañas por el número de caminos que sale de cada cabaña, se obtiene el doble del número de caminos totales. Justifiquen en su cuaderno.

f) Si x representa el número de cabañas, ¿cuántos caminos salen de cada cabaña? ______

______

Nota histórica

Los escribas de Asiria y Babilonia eran expertos resolviendo ecuaciones de segundo grado sin utilizar símbolos para las incógnitas y operaciones. Describe, únicamente con palabras, dos problemas de esta lección y su solución. Imagina cómo sería tu libro de matemáticas sin símbolos.

g) Expliquen por qué se plantea la ecuación $x(x - 1) = 2(190)$.

______

______

h) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación anterior? ______

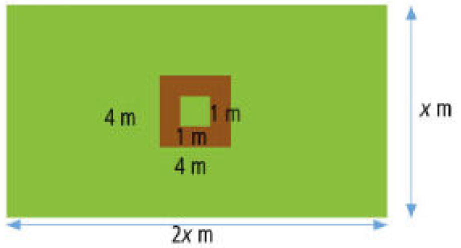
i) ¿Cuántas cabañas hay en el predio? ______

- Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Expliquen por qué sólo se considera la solución positiva.
- Analicen si esta propuesta de conectar todas las cabañas entre sí considera la protección del medio ambiente.

Consolido mis competencias

Actividad 5. Trabaja en pareja. Resuelvan los problemas. Expliquen sus procedimientos y operaciones en su cuaderno.

a) Se desea cercar un terreno con forma rectangular, éste tiene 1 235 m^2 de áreas verdes y el resto es adoquín. El largo del terreno mide el doble que el ancho. Observen la figura.



- Planteen una ecuación para calcular el área de cada uno de los siguientes casos.

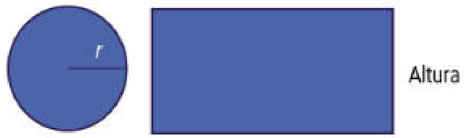
Área 1 = ______ Área 2 = ______ Área 3 = ______

- Propongan una ecuación para determinar la longitud de los lados del terreno.

______

- ¿Cuál es la longitud de los lados del terreno? ______
- ¿Cuántos metros de cerca se necesitan? ______

b) Se desea construir un pequeño bote cilíndrico sin tapa de 5 cm de altura con 200 cm^2 de material. El material para hacerlo es el que se ve en el dibujo.¿Qué radio debe tener la base del cilindro? Consideren que la base del rectángulo mide $2\pi r$.



- Planteen una ecuación para encontrar el radio del cilindro. ______
- ¿Cuál debe ser el radio del cilindro? ______

- Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Expliquen por qué sólo se consideran las soluciones positivas y mencionen las ventajas y desventajas de plantear una ecuación para resolver un problema. Justifiquen y argumenten sus razones.

Consolido mis competencias

Actividad 6. Resuelve las ecuaciones. Para cada una, propón un problema que se resuelva con ella.

Vinculación

Artes Plásticas
Gran parte de lo que sabemos acerca de las culturas antiguas y su manera de hacer matemáticas se ha descubierto por medio del análisis de imágenes. Busca información sobre la tablilla de Yale. ¿Qué ecuación cuadrática aparece en ella?

a) $x^2 - 64 = 36$

Solución: ____________________

Enunciado del problema. Consideren las dos soluciones.

____

____

b) $\pi r^2 - \pi \frac{r^2}{2^2} = 3\pi$

Solución: ____________________

Enunciado del problema. Consideren sólo la solución positiva. ____________________

____

____

Actividad 7. Lee la información y responde.

Regresa al problema del inicio de esta lección "Se desconoce el número de alumnos que hay en una clase de repostería, cada alumno elaborará una galleta para cada compañero, una para él mismo y una para el profesor, y se sabe que se cocinarán 210 galletas en total". Plantea una ecuación que te permita encontrar el número de alumnos que hay en la clase.

Ecuación: ____________________

a) Describe cómo se resuelve esta ecuación. ____________________

____

b) ¿Cuántos alumnos hay en la clase? ____________________

c) ¿Cuántas bolsas de galletas se repartirán? ____________________

d) ¿Cuántas galletas tendrá cada bolsa? ____________________

- **Comenta con tus compañeros qué métodos emplearon para resolver ecuaciones cuadráticas. Expliquen si hay alguno que consideren más eficiente.**

1.2 Figuras semejantes y congruentes

Construyo figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y analizo sus propiedades.

Cálculo mental

a) $\frac{1}{3}$ de 90° = ______

b) $\frac{1}{5}$ de 75° = ______

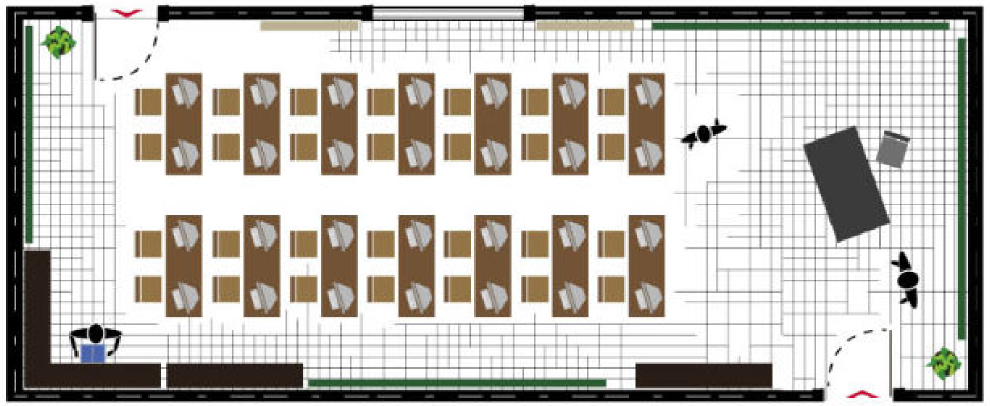
c) $\frac{4}{3}$ de 45° = ______

d) $\frac{3}{4}$ de 360° = ______

e) $\frac{3}{2}$ de 80° = ______

Activo mis competencias

En una escuela secundaria se organizó un concurso para construir un nuevo salón de usos múltiples. El proyecto ganador presentó el siguiente plano.
Observa la imagen y responde.



a) Se necesitan conservar las proporciones del salón. ¿Cuánto debe medir de ancho si el largo se requiere de 16 m? ____________________

b) Explica cómo obtuviste tu respuesta. ____________________

____

____

c) Si el ancho del salón fuera de 10 m, ¿cuánto debe medir el largo? ____________________

d) Explica cómo obtuviste tu respuesta. ____________________

____

____

- **Comenta tus respuestas con tus compañeros. Reflexionen qué procedimiento, de los que usaron, es el más eficiente para obtener una medida a partir de otra dada y los datos del plano.**

Consolido mis competencias

Actividad 8. Traza, en parejas, lo que se indica; recorten y respondan.

a) Tracen los siguientes grupos de rectángulos y recórtenlos. Grupo I: cuatro rectángulos diferentes con las medidas que ustedes elijan. Grupo II: cuatro rectángulos con las medidas de la siguiente tabla.

TIC
Entra a
www.redir.mx/matfort3-022
Selecciona el interactivo de figuras semejantes y efectúa las actividades. Comenta tus conclusiones con un compañero.

Rectángulo	A	B	C	D
Ancho (cm)	2.5	3	1.3	2
Largo (cm)	7.5	9	3.9	6

b) En el rectángulo **A**. ¿Cuál es la relación entre la medida del largo y la del ancho? ______

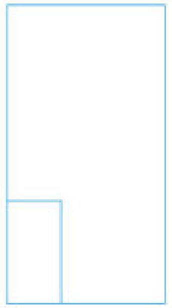
c) En el resto de los rectángulos de la tabla. ¿Cuál es la relación entre las medidas del largo y del ancho? ______

d) Revisen los rectángulos del grupo I. Expliquen la relación entre el largo y el ancho.

______

e) Coloquen los rectángulos de los grupos I y II como se indica y respondan.

- Hagan coincidir los cuatro rectángulos en el vértice **O**. Cuiden que estén alineados como muestra la imagen de la derecha.
- Unan los vértices opuestos a **O**, mediante un segmento.



f) Al unir los vértices de los rectángulos del grupo I, ¿qué tipo de línea se forma? ______

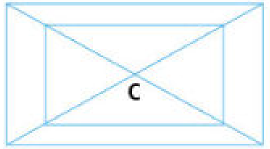
g) ¿Cómo es la línea en el caso de los rectángulos del grupo II?

______

h) Expliquen por qué en algunos casos la línea que une a los vértices opuestos no es recta y en otros casos sí. ______

______

i) Coloquen los rectángulos de los grupos I y II, como muestra la imagen. Tracen las diagonales de los rectángulos; colóquenlos de tal manera que sus centros **C** coincidan, y sus lados queden paralelos. Respondan y justifiquen en su cuaderno.



- ¿En qué grupo las diagonales de los cuatro rectángulos coinciden?
- ¿De qué depende que las diagonales coincidan o no en ambos grupos?

Actividad 9. Completa la tabla con la información de la sección "Activo mis competencias", y responde.

a) La tabla muestra las sugerencias que hizo un padre de familia, respetando las proporciones del plano elegido, para lo que debe medir el ancho del salón.

Ancho (m)	8	8.2	10	11	12.3	15	16.4
Largo (m)		20.5					
$\frac{\text{Largo}}{\text{Ancho}}$							

- ¿Cómo es el largo respecto al ancho en cada caso? ______
- Si el máximo largo posible es de 28 m, ¿cuál es el ancho máximo que puede tener el salón de usos múltiples? ______

b) Analiza las medidas que propusieron otros padres de familia para el salón de usos múltiples. Señala aquellas que no guardan la misma proporción con las dimensiones originales.

Rectángulo	A	B	C	D	E	F	G
Ancho (m)	7	7.2	9	8	10	11.2	9
Largo (m)	17.5	18	22.5	22	25	28	24
$\frac{\text{Largo}}{\text{Ancho}}$							

c) ¿Cuál es la razón del largo entre el ancho de los rectángulos cuya medida de los lados no es proporcional con la del plano seleccionado? ______

◆ **Comenta los procedimientos que utilizaste con el fin de encontrar las condiciones necesarias para que en dos rectángulos la medida de sus lados correspondientes sea proporcional. Argumenta y justifica tus respuestas en grupo.**

Actividad 10. Reúnete en pareja. Analicen la información, completen la tabla y respondan.

a) Cada uno trace dos triángulos. Se indica la medida de sus ángulos. **ABC**: $\measuredangle A = 110°$, $\measuredangle B = 35°$, $\measuredangle C = 35°$ y **DEF**: $\measuredangle D = 45°$, $\measuredangle E = 55°$, $\measuredangle F = 80°$

b) Revisen y comenten cómo trazaron los triángulos en cada caso y completen la tabla.

c) ¿Qué relación hay entre las medidas de los lados correspondientes? ____________

Triángulo ABC	Medida $\overline{AB}$	Medida $\overline{BC}$	Medida $\overline{CA}$
Estudiante 1			
Estudiante 2			

Triángulo DEF	Medida $\overline{DE}$	Medida $\overline{EF}$	Medida $\overline{FD}$
Estudiante 1			
Estudiante 2			

d) Calculen la razón que hay entre la medida de los lados correspondientes.

Triángulo ABC	Medida $\overline{AB}$	Medida $\overline{BC}$	Medida $\overline{CA}$
Estudiante 1			
Estudiante 2			
Razón			

Triángulo DEF	Medida $\overline{DE}$	Medida $\overline{EF}$	Medida $\overline{FD}$
Estudiante 1			
Estudiante 2			
Razón			

- Escriban la razón de las parejas de lados correspondientes en los triángulos **ABC** y **DEF**.
- Razón en **ABC** ____________ y razón en **DEF** ____________

◆ **Comenten qué procedimientos usaron con el objetivo de hallar las condiciones necesarias para que en dos triángulos la medida de sus lados correspondientes sea proporcional. Argumenten y justifiquen sus respuestas en grupo.**

Actividad 11. Traza lo que se te indica y responde.

a) Traza un triángulo **M** cuyos lados midan 4 cm, 6 cm y 9 cm, y otro triángulo **N** con medida de sus lados 6 cm, 9 cm y 13.5 cm.

- Mide, con un transportador, los ángulos de cada uno de los triángulos. Observa cómo son entre sí los ángulos correspondientes.
- Triángulo **M**: ____________ Triángulo **N**: ____________
- Calcula las razones o cocientes de sus lados correspondientes. ¿Todos los cocientes son iguales? ____________ ¿A qué le atribuyes tal resultado? ____________

b) Una vez que hayas trazado los triángulos **M** y **N**, describe los pasos para trazar un triángulo congruente a **M** o **N**. Se indican dos pasos, pero puedes anotar los que consideres necesarios. Trata de ser conciso.

Paso 1. ____________

Paso 2. ____________

◆ **Compara tu descripción con la de otro compañero; revisen sus errores y corríjanlos. Escriban la razón de las medidas de los lados entre el triángulo original y el congruente.**

c) Traza un triángulo **WXY**, cuyos lados midan 5 cm, 7 cm y 10 cm y otro triángulo **W′X′Y′**, que sea semejante a **WXY**, cuyos lados sean $1\frac{1}{2}$ veces mayores.

Vinculación

Historia
Busca, en tus libros o en internet, los mapas que usaban los primeros conquistadores de la Nueva España. Podrás notar que son diferentes de los actuales. Platica con tus compañeros la importancia de los conceptos de proporcionalidad en la elaboración de mapas.

- Mide, con un transportador, los ángulos de cada uno de los triángulos.
- Completa la tabla de las razones o cocientes de sus lados correspondientes.

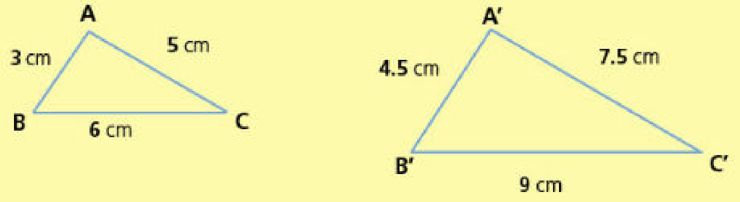
Triángulo **WXY**	Medida $\overline{WX}$	Medida $\overline{WY}$	Medida $\overline{XY}$
	5		
Triángulo **W′X′Y′**	Medida $\overline{W'X'}$	Medida $\overline{W'Y'}$	Medida $\overline{X'Y'}$

- ¿Todos los cocientes son iguales? ______________________
- ¿A qué le atribuyes este resultado? Justifica tu respuesta. ______________________

◆ Compara tus resultados con los de un compañero. Redacten, en su cuaderno, un procedimiento distinto de los que aquí se han visto para construir una figura semejante a otra.

Formalización. Dos figuras son semejantes cuando la medida de los ángulos correspondientes es igual y la medida de los lados correspondientes es proporcional.

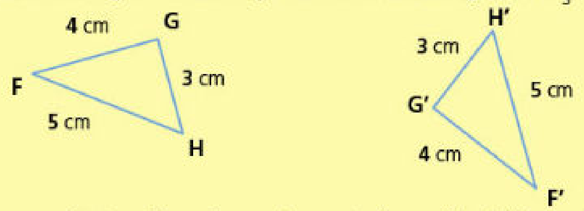
Por ejemplo: el triángulo **ABC** es semejante al triángulo **A′B′C′**, pues sus ángulos son iguales ya que la razón de la medida de los lados correspondientes es la misma.



$$\frac{3}{4.5} = \frac{5}{7.5} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

A este cociente se le llama **razón de semejanza**.

Dos figuras son **congruentes** entre sí cuando la medida de los ángulos es igual y la medida de los lados correspondientes también es igual. Observa que la **razón de semejanza** es $\frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = 1$.



Dos rectángulos son semejantes si la razón que hay entre la medida del largo y la medida del ancho es igual.

Actividad 12. **Lee la información anterior y responde. Haz los trazos en tu cuaderno.**

a) ¿Es posible trazar un cuadrado que no sea semejante a otro cuadrado?

- Si tu respuesta fue positiva, trázalo. ______________________
- Si tu respuesta fue negativa, explica por qué no es posible trazarlo.

Nota histórica

Para poder hacer o leer un mapa se usan las nociones de congruencia y semejanza que acabas de estudiar.
Se han encontrado mapas de la ciudad bíblica de Babilonia del siglo XV a. C. y aún más antiguos. Esto confirma que, desde la Antigüedad, las diferentes culturas se han interesado por estos temas.
Busca un mapa en la biblioteca o en internet y describe un procedimiento para hacer ese mapa con una escala de 1 a 3.

b) Traza un triángulo rectángulo y dos triángulos semejantes a él.

c) Traza, en tu cuaderno, dos triángulos isósceles semejantes cuyo ángulo formado por los lados iguales mida 60°. ¿Cuál es la razón de semejanza de estos triángulos? __________

d) Si los ángulos correspondientes de dos triángulos son iguales, ¿se puede concluir que estos triángulos son semejantes? Argumenta tu respuesta.

e) Si los ángulos correspondientes de dos rectángulos son iguales, ¿se puede concluir que estos rectángulos son semejantes? Argumenta tu respuesta.

f) Traza, en tu cuaderno, dos mapas que sean semejantes al que se muestra, cuya razón de semejanza sea de $\frac{1}{2}$ y 3, respectivamente.

Centro histórico de la ciudad de Puebla

◆ **Compara tus respuestas con las de un compañero. Redacten una justificación común en su cuaderno acerca de lo que se necesita para construir una figura que sea semejante a otra y una que sea congruente.**

1.3 Criterios de congruencia y semejanza

Explicito los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

Cálculo mental

a) El triple de 60° ________
b) El doble de 123° ________
c) El triple de 45° más el doble de 25° ________
d) El cuádruple de 11° más el quíntuple de 32° ________

Activo mis competencias

Trabaja con un compañero. Lean la información y respondan.

a) Tracen un triángulo cuyos lados midan 4 cm, 7 cm y 10 cm.

- Escriban la medida de sus ángulos. ________
- ¿El triángulo que trazaste es semejante al de tu compañero? Explica.
- ¿Es congruente? ______ Arguméntalo. ______
- Fíjate en la medida de los ángulos del triángulo que trazaste y el que trazó tu compañero.
- ¿Será posible construir un tercer triángulo que sea semejante a ambos triángulos, pero no congruente? ________
- Si tu respuesta es sí, entonces traza, en tu cuaderno, un triángulo cuyas medidas de los lados sean diferentes. Si tu respuesta es no, escribe tus razones. ________

Recuerda

Dos polígonos son *semejantes* entre sí cuando la medida de los ángulos correspondientes es igual y la medida de los lados correspondientes es proporcional.

Cuando los ángulos correspondientes son iguales y la razón de la medida de los lados correspondientes es igual a 1, entonces los polígonos son *congruentes*.

b) Traza, en tu cuaderno, un triángulo cuyos ángulos midan 70°, 50° y 60°; además de que sea semejante al que trace tu compañero, pero no congruente.

- Explica por qué es posible construir dos triángulos semejantes sabiendo sólo la medida de los ángulos correspondientes. ______________________

- ¿Cuántos triángulos semejantes más podrán trazar, además de que sus ángulos midan 70°, 50° y 60°? ______________ Argumenten su respuesta. ______________

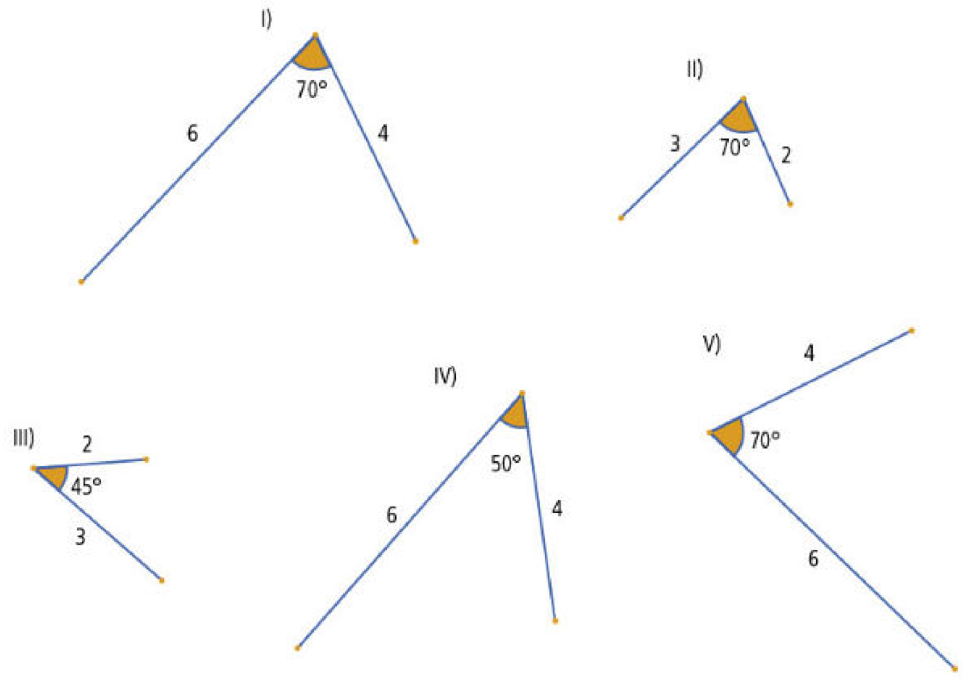
c) Traza los siguientes triángulos. Uno cuya medida del ángulo sea de 35° y los lados que lo comprenden midan 4 cm y 5 cm. Otro con la misma medida del ángulo, pero con lados de 6 cm y 7.5 cm.

- ¿Cómo son entre sí los lados correspondientes de los triángulos? ______________
- ¿Cómo son entre sí sus ángulos correspondientes? ______________

◆ **Discutan con otra pareja. Tracen dos triángulos que no sean semejantes: A, cuyos lados midan 4 cm y 6 cm; B, cuyos lados midan 8 cm y 12 cm. ¿Cuál es la condición o condiciones que deben cumplirse para estar seguros de que los dos triángulos sean semejantes? ¿Son las mismas para asegurar que sean congruentes? ¿Qué condición o condiciones deben cumplirse para que se tracen dos triángulos semejantes a A y a B?**

Consolido mis competencias

Actividad 13. Sigue las instrucciones para trazar cinco triángulos. Analiza las figuras y responde en tu cuaderno.



a) ¿Qué ángulos tienen la medida de sus lados proporcionales a los de **I**?

b) Antes de trazar el tercer lado de los cinco triángulos, reflexiona en qué triángulos el tercer lado será proporcional al de la figura **I**.

c) Traza el lado que falta en cada caso y mídelo. ¿En qué triángulos el lado que trazaste es proporcional con el lado de la figura **I**?

d) Mide, con un transportador, los dos ángulos que se formaron y explica la relación que hay entre los ángulos del triángulo **I** y la proporcionalidad de los lados de los triángulos.

e) ¿Qué triángulos son semejantes?

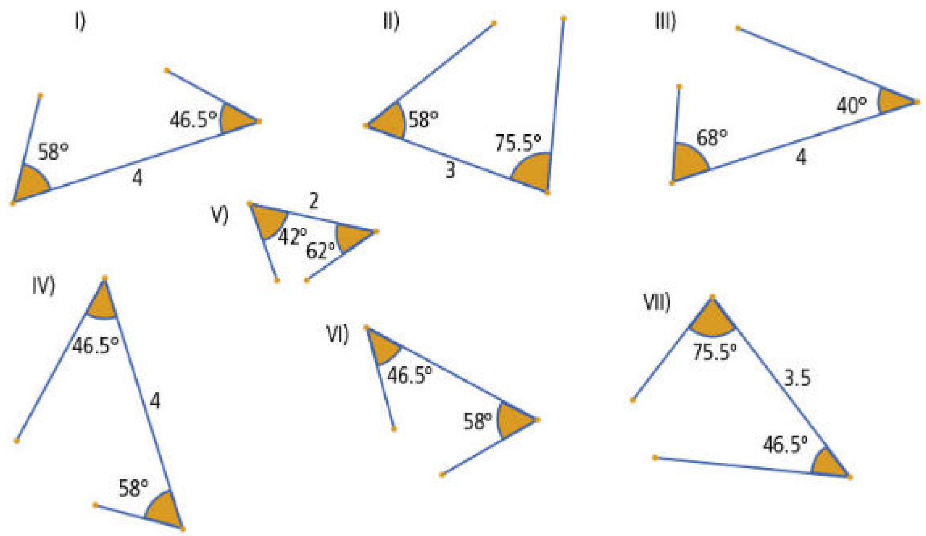
f) ¿Y cuáles son congruentes?

TIC Aprende más acerca de la congruencia en www.redir.mx/matfort3-031 y analiza los ejemplos. Escribe, en el cuaderno, las características de la congruencia y la semejanza, y sus diferencias.

◆ **Compara tus respuestas con las de tus compañeros y discutan qué condiciones se necesitan para que dos triángulos sean semejantes o congruentes entre sí: ¿basta con conocer la medida de uno de sus ángulos o sólo los lados que lo forman?**

Actividad 14. Sigue las instrucciones y responde.

a) Completa las figuras de tal manera que en todos los casos se forme un triángulo.



b) Indica el ángulo que falta en cada triángulo.

c) ¿En qué triángulos los ángulos correspondientes son iguales?

____

d) Mide los lados de cada triángulo. ¿En qué triángulos la medida de sus lados correspondientes es proporcional? ______________

____

e) ¿Qué triángulos son semejantes? ______________

f) ¿Y cuáles son congruentes? ______________

Nota histórica

Los criterios de congruencia eran conocidos en la antigua Grecia. Investiga cómo se llama el libro en el que Euclides escribió sobre estos conocimientos y en qué siglos, aproximadamente, lo hizo.

- Compara tus resultados con los de un compañero. Comenten la relación que encuentran entre la medida de los dos ángulos que se indican en un inicio y que los triángulos sean semejantes o no.
- Comenten si dada la medida de dos ángulos es posible determinar si los dos triángulos son congruentes entre sí. Argumenten su respuesta y escríbanla en su cuaderno.

Actividad 15. Analiza los datos, haz los trazos necesarios en tu cuaderno y explica si los triángulos son semejantes. Argumenta tu respuesta en cada caso.

a) Triángulo I con 6.8 cm y 8 cm de medida en dos de sus lados; triángulo II con 1.7 cm y 2 cm de medida en dos de sus lados. La medida del ángulo comprendido entre los lados es de 80° en ambos.

____

____

b) Triángulo I y II.

Triángulo I Triángulo II

____

____

c) Los triángulos I y II de diferente tamaño, con 35° y 75° en dos de sus ángulos ______________

____

____

d) Triángulo I con 3.5 cm, 4.3 cm y 5.5 cm en cada lado; triángulo II que mida 5.25 cm, 6.45 cm y 8.25 cm de cada lado ______________

____

____

e) Triángulo I con 30 cm y 60 cm en dos de sus lados; triángulo II con 2.4 m y 4.8 m en dos de sus lados. El ángulo comprendido entre los lados no debe ser igual.

____

____

- Compara tus argumentos con los de algún compañero e intercambien opiniones. Revísenlos y concluyan, con la guía de su profesor, cuáles les permiten decidir si dos triángulos son semejantes.

Consolido mis competencias

Actividad 16. Analiza los datos, haz los trazos en tu cuaderno y explica si los triángulos son congruentes. Argumenta tu respuesta en cada caso.

a) Dos triángulos casi del mismo tamaño con los tres ángulos iguales para ambos triángulos:

90°, 45°, y 45° ______________________________

____

b) Dos triángulos del mismo tamaño con 60° y 45° en dos de sus ángulos. La medida del

lado común es de 5.5 cm para ambos casos. ______________________________

____

c) Dos triángulos que tengan 60° y 45° en dos de sus ángulos. Cada triángulo tiene un lado

que mide 7 cm. ______________________________

____

____

d) Dos triángulos con medidas de 7.3 cm y 5.5 cm en dos de sus lados. El ángulo opuesto

al segmento de 7.3 cm mide 60° en ambos casos. ______________________________

____

____

e) Dos lados congruentes de 7 cm y 4 cm. El ángulo opuesto al segmento de 4 cm mide 30°

en ambos casos. ______________________________

____

____

- Compara tus respuestas de las actividades 15 y 16 con las de tus compañeros. Revisen, en grupo, sus argumentos y concluyan qué explicación es más convincente.
- Intercambien opiniones sobre cuáles son las condiciones mínimas necesarias para saber si dos triángulos son semejantes o congruentes entre sí.

Formalización. A las condiciones mínimas para establecer que dos triángulos son semejantes entre sí se les denomina **criterios de semejanza de triángulos**. Dos triángulos son semejantes…

1. Si la medida de sus lados correspondientes es proporcional. **Criterio lado-lado-lado** o **LLL**.
2. Cuando la medida de dos ángulos correspondientes es igual. **Criterio ángulo-ángulo** o **AA**.
3. Si la medida de los lados correspondientes es proporcional y la medida del ángulo que forman es igual. **Criterio lado-ángulo-lado** o **LAL**.

A las condiciones mínimas para establecer que dos triángulos son congruentes entre sí se les denomina **criterios de congruencia de triángulos**. Dos triángulos son congruentes…

1. Si la medida de los tres lados de uno es igual a la medida de los lados correspondientes del otro. **Criterio LLL**.
2. Cuando la medida de dos lados de un triángulo es igual a la medida de los lados correspondientes del otro y un ángulo comprendido entre ellos es igual. **Criterio LAL**.
3. Cuando la medida de dos ángulos de un triángulo es igual a la medida de sus correspondientes del otro y el lado es común. **Criterio ALA**.
4. Cuando la medida de dos lados de un triángulo es igual a la medida de los lados correspondientes del otro y la medida del ángulo opuesto al mayor de los lados también es igual. **Criterio LLA**.

Actividad 17. Trabaja en parejas. Hagan las actividades y argumenten sus respuestas.

a) Den un ejemplo y tracen las figuras en el cuaderno para cada criterio de semejanza de triángulos.

b) Para saber si dos triángulos son semejantes entre sí, es suficiente conocer la medida de

dos de sus ángulos y no los tres. Expliquen con sus palabras. ______________________________

____

____

c) El hecho de conocer la medida de los tres ángulos en dos triángulos. Expliquen por qué

no es una condición suficiente para saber que los triángulos son congruentes entre sí.

____

____

d) Comenten si se cumple o no el criterio de congruencia para dos triángulos en el caso en que la medida de dos lados de uno de los triángulos es igual a la medida de los lados correspondientes del otro, y la medida del ángulo opuesto al menor de los lados también es igual. Pongan un ejemplo que ayude a argumentar su respuesta.

____

____

◆ **Revisen el resultado que obtuvieron en el inciso e) de la actividad 16. Escriban, entre todos, una conclusión.**

Actividad 18. Traza, en tu cuaderno, un triángulo congruente al que se describe.

a) Triángulo que mida 7 cm, 6 cm, y 5 cm de cada lado

b) Un triángulo cuya medida de sus tres ángulos sea de 90°, 60°, 30° y la medida de uno de sus lados, 4.5 cm

c) Triángulo con 37° y 86° en dos de sus ángulos y la medida del lado común a ambos ángulos sea de 5.3 cm.

d) Triángulo con 4 cm y 6 cm de medida en dos de sus lados. El ángulo opuesto a 6 cm mide 85°.

Actividad 19. Traza, en cada caso y en el cuaderno, dos triángulos semejantes con la información que se proporciona.

Recuerda

A la razón entre lados correspondientes se le llama *razón de semejanza*.

a) Dos ángulos, 55° y 65°, con una razón de semejanza entre ellos de $\frac{1}{4}$

b) Triángulo I: dos ángulos con 47° y 53°; triángulo II: dos ángulos con 53° y 80°, y con razón de semejanza igual a $\frac{1}{3}$

c) Triángulo I: que mida 3 cm, 4 cm, y 5 cm de cada lado; triángulo II: semejante al triángulo I con la razón de semejanza igual a $\frac{2}{3}$. ¿Qué tipo de triángulo se formó?

d) Triángulo I con 4 cm y 7 cm en dos lados y 60° para el ángulo que forman estos lados; triángulo II con la razón de semejanza que desees. Anota la razón de semejanza de los triángulos que trazaste.

e) Triángulo I con 2.3 cm y 7.8 cm en dos de sus lados y 115° para el ángulo que forman estos lados; triángulo II con las mismas medidas que el triángulo I y con razón de semejanza de $\frac{3}{4}$

f) En cada caso se puede indicar otra razón de semejanza. Indica cuál es para cada pareja de triángulos y explica, en el cuaderno, la relación entre las dos razones.

1.4 Gráficas, tablas y expresiones algebraicas

Analizo representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas), que corresponden a una misma situación. Identifico las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

Cálculo mental

a) $\frac{2}{3}$ de 480 ________

b) $\frac{1}{9}$ de 990 ________

c) $\frac{5}{10}$ de 500 ________

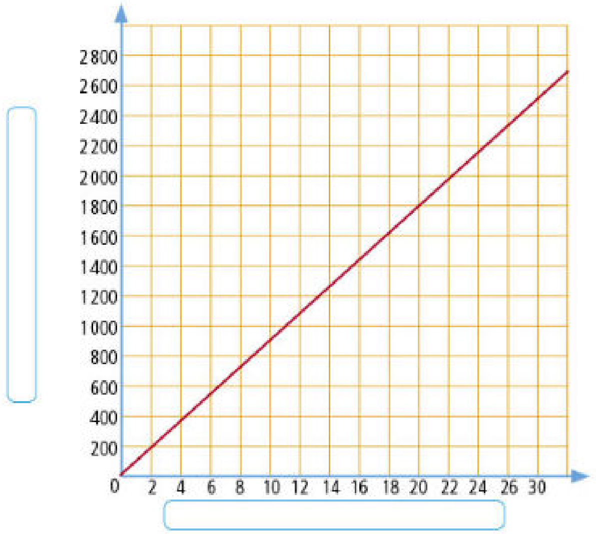
d) $\frac{5}{3}$ de 300 ________

Activo mis competencias

Chuy trabajó como repartidor de pan durante varios días y registró en una gráfica el dinero que ganó.

a) Coloca, en la gráfica, los títulos de los ejes donde corresponde.

Salario (pesos)   Tiempo (días)



b) Completa la tabla a partir de los valores de la gráfica; Chuy descansa sábados y domingos.

Tiempo	1 día	1 semana	1 quincena	1 mes
Salario				

c) De acuerdo con datos del Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social (Coneval), la canasta básica alimentaria mensual en las zonas urbanas costó $800.00, aproximadamente, durante el 2013. ¿Cuántos días debe trabajar Chuy para adquirir la canasta básica alimentaria? ______________________

d) Si no gasta en nada más durante tres meses, ¿cuánto dinero ahorrará? Explica tu respuesta.

____

e) Si continúa trabajando de repartidor, ¿cuánto ganará en un año? ____________

f) Describe, en el cuaderno, tu procedimiento.

◆ Compara tus respuestas con las de un compañero y justifiquen si la relación entre los días trabajados y el salario se corresponde con una relación de proporcionalidad directa. Chuy ahorra 10% de su salario; analicen si la relación entre el tiempo trabajado y el ahorro es directamente proporcional. Expongan sus conclusiones ante el grupo.

Consolido mis competencias

Actividad 20. Reúnete con un compañero y resuelvan. Respondan en el cuaderno.

En la panadería La Guadalupe de Comala, por cada 80 kg de harina se hacen 120 kg de pan. La gráfica representa esta situación. Analícenla, completen la tabla y respondan.

Recuerda

El origen es el punto (0, 0), donde se cortan los ejes de coordenadas *x* y *y*.

El eje *x* también es llamado *eje de las abscisas* y el *y*, *eje de las ordenadas*.

Harina (kg)	4	20	32	40	48	60	68	72	76	80
Pan (kg)										

a) ¿Cuántos kilogramos de harina se necesitan para hacer uno de pan?

b) Escriban la interpretación de que la gráfica pase por el origen.

c) Representen con la letra *y* a los kilogramos de pan obtenidos y con *x* a los kilogramos de harina necesarios para prepararlo. Escriban la expresión algebraica que relacione la cantidad (*x*) de harina necesaria para obtener (*y*) cantidad de pan.

◆ Comenta con tus compañeros cómo obtuvieron la expresión algebraica. Discutan si respondieron las preguntas a partir de la gráfica y de la tabla. Escriban una conclusión sobre la utilidad de cada representación.

Actividad 21. Trabaja en equipo. Contesten lo que se indica.

a) Alexa elaboró la tabla I que relaciona la cantidad de botellas de agua vendidas y el precio pagado por ellas; complétenla y escriban la expresión algebraica que la representa.

Tabla I

Botellas de agua *x*	Precio *y*
4	12
6	18
9	
12	36
13	

Expresión algebraica: ____________________

b) Expliquen si los datos se corresponden con una relación de proporcionalidad. ____________________

c) Encuentren la expresión algebraica que representa la tabla II. Escriban una situación que sea modelada por estos datos. ____________________

Tabla II

x	*y*
4	22
6	32
9	
12	
13	67

Expresión algebraica: ____________________

d) Si se grafican los datos de las dos tablas, ¿qué gráfica pasa por el origen? ____________________

Expliquen por qué. ____________________

e) Expliquen, en el cuaderno, cómo pueden identificar en una tabla y en una gráfica si hay una relación de proporcionalidad.

◆ Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Discutan las características de cada relación indicada en la tabla. Escriban una conclusión grupal sobre las características de una relación de proporcionalidad.

Consolido mis competencias

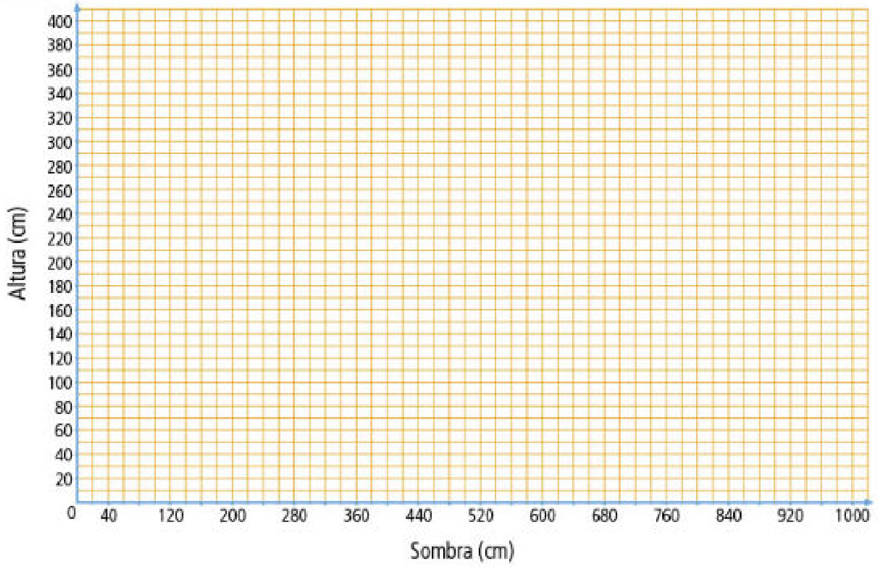
Actividad 22. Trabaja con un compañero, lean la nota histórica y resuelvan.

a) Alexa se entusiasmó al leer sobre el trabajo de Tales de Mileto; se organizó con el grupo y midió la sombra de varios objetos a la misma hora. Ella comenzó la tabla. Calculen las alturas faltantes y complétenla.

Nota histórica

El matemático griego Tales de Mileto calculó la altura de la pirámide de Keops a partir de la sombra que proyectaba. Observó la longitud de la sombra de la pirámide en el momento en que la sombra de Tales era igual a su altura y estableció una relación de proporcionalidad entre la medida de los lados de los triángulos que se forman al considerar la sombra de la pirámide y la suya.

Objeto	Sombra (cm)	Altura real (cm)
Metro	250	100
Árbol	550	
Poste de luz	900	
Asta	450	180
Escalera	400	
Escoba	300	



Recuerda

Revisa la lección acerca de figuras congruentes y semejantes. Obtén la razón de semejanza entre los triángulos y compárala con la que obtengas en la expresión algebraica que se te pide en el inciso d).

b) Localicen los datos obtenidos en el plano cartesiano y respondan.

- ¿Qué ocurre si unes todos los puntos que encontraste? __________
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? __________

c) ¿Cómo se interpreta el valor de la constante de proporcionalidad? __________

d) Escriban la expresión algebraica que relacione la longitud (x) de la sombra de los objetos para obtener la altura (y). __________

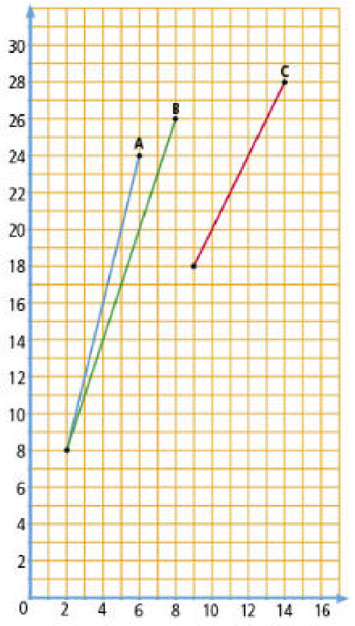
- **Lee, con el grupo, la información y compárenla con las conclusiones que obtuvieron en las actividades 21 y 22.**

Formalización. Una **razón** expresa la relación entre dos conjuntos de cantidades $\frac{y}{x} = k$, donde k es el **factor de proporcionalidad**.

La gráfica de una función de proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen y su expresión algebraica es de la forma $y = kx$.

Actividad 23. Trabaja con dos o tres compañeros. Hagan lo que se indica.

Los segmentos forman parte del recorrido de tres ciclistas. Los tres ciclistas iniciaron el recorrido en el tiempo $t = 0$ y lo terminaron en los puntos **A**, **B** y **C**, respectivamente.



a) Encuentren la expresión algebraica de la recta que pasa por cada segmento.

A __________

B __________

C __________

b) ¿Cuáles son de proporcionalidad directa? __________

c) Expliquen, en el cuaderno, la razón.

d) Escriban, en los ejes, lo que representa cada uno y su unidad de medida.

e) Describan, en el cuaderno, el paseo de cada ciclista.

Consolido mis competencias

Actividad 24. Efectúa lo que se indica.

a) Un recipiente contiene medio litro de agua. El recipiente es llenado con un flujo constante. Completa la tabla y responde.

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Contenido (ml)				1 250					

- ¿Cuál es el flujo de llenado? ____________________
- Explica cómo lo determinaste. ____________________
- ¿Qué ecuación modela la situación? ____________________

b) Grafica los datos de la tabla.

- ¿La situación se corresponde con una relación de proporcionalidad directa? Justifica tu respuesta. ____________________

Vinculación

Ciencias
En el bloque 1 de Ciencias estudiaste la concentración de una mezcla en unidades de porcentaje (%) y se usaron relaciones que se corresponden con relaciones de proporcionalidad.
Busca uno de los ejemplos, descríbelo, en tu cuaderno, y elabora la tabla, la gráfica y la ecuación correspondiente.

- ¿Qué cantidad de agua contiene el recipiente después de 15 s de llenado? ____________________
- Explica cómo lo determinaste. ____________________

c) Describe una situación relacionada con el vaciado de un recipiente mediante un flujo constante que sí sea de proporcionalidad directa. ____________________

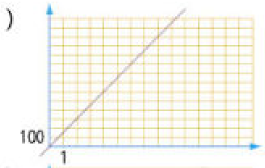
- Escribe la ecuación que modela la situación. ____________________
- Haz la gráfica correspondiente.

◆ Compara tus respuestas con las del grupo. Comenten cómo determinaron el flujo en la primera situación y la manera en que se obtiene el flujo a partir de la gráfica. Indiquen la utilidad de conocer la tabla, la gráfica o la ecuación para una situación que relaciona dos cantidades.

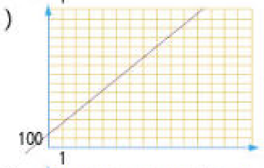
Consolido mis competencias

Actividad 25. **Relaciona cada situación con la gráfica que le corresponde.**

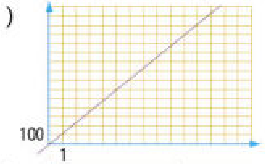
I. Marisol tiene $150.00 cuando empieza a ahorrar. Cada semana ahorra $120.00. ¿Cuánto dinero tiene después de n semanas? ( )



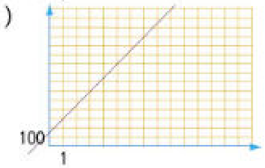
II. Un chapoteadero contiene 120 l de agua y es llenado con un flujo constante de 150 l por segundo. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse? ( )



III. Martín compra en el supermercado 250 g de jamón en $37.50. ¿Cuál es el precio por kilogramo? ( )



IV. Un corredor tiene un plan de entrenamiento para completar 120 km semanales. ¿Cuántos kilómetros recorre después de n semanas? ( )



TIC Entra a www.redir.mx/matfort3-044 y repasa los conceptos de la línea recta y proporcionalidad. Escribe, en el cuaderno, las respuestas.

Actividad 26. **Regresa al problema de la sección "Activo mis competencias", recupera los datos necesarios. Responde en tu cuaderno.**

El patrón de Chuy le paga $450.00 por repartir pan de lunes a viernes.

a) Nombra con la literal y al dinero que gana, y con x los días trabajados. Escribe la ecuación que relaciona el ahorro con los días trabajados.

b) Encuentra una expresión algebraica que relacione el dinero que ahorra Chuy (correspondiente a 10% de su salario) con los días trabajados y traza su gráfica.

c) Utiliza estas expresiones para responder a las preguntas planteadas en el problema de la sección "Activo mis competencias".

- **Trabaja con un compañero. Comparen las respuestas de esta actividad con las del inicio. Planteen nuevos cuestionamientos que se respondan con la tabla, la gráfica o las expresiones algebraicas. Analicen en qué casos es más eficaz cada tipo de representación.**
- **Investiguen qué es la canasta básica. Reflexionen sobre la importancia del ahorro. ¿Es factible que Chuy ahorre ese porcentaje de su salario? ¿Qué otros gastos debería considerar?**

1.5 Relaciones de variación cuadrática

Represento de forma tabular y algebraica relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

Cálculo mental

a) $0^2 =$ ______
b) $0.4^2 =$ ______
c) $0.8^2 =$ ______
d) $1.1^2 =$ ______

Activo mis competencias

Para obtener utilidades, Alonso necesita vender cierta cantidad de artículos. La utilidad está dada por la ecuación $U = 0.5x^2 - 4x$, x representa la cantidad de artículos. Completa la tabla y responde.

Artículos (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Utilidad (U)										

a) ¿Qué cantidad de artículos necesita vender para recuperar la inversión? ______

b) Escribe una interpretación para los primeros valores de la utilidad que se obtienen en la tabla. ______

c) ¿Cuántos artículos debe vender si quiere una ganancia mayor a 40 pesos? ______

Explica tu procedimiento. ______

d) ¿Con qué valor de x, el valor de la utilidad es 0? ______

¿Qué significa esto? ______

e) ¿En qué puntos los valores de la tabla son positivos? ______

¿Qué significa esto? ______

f) ¿A partir de cuántos artículos Alonso empieza a obtener ganancias? ______

Explica tu procedimiento. ______

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten si pudieron responder con los datos que indicaron en la tabla o necesitaron obtener más valores para el número de artículos vendidos.**

Consolido mis competencias

Actividad 27. Lee la información y haz lo que se indica.

La tabla indica los datos que se obtuvieron al hacer el experimento de dejar caer una pelota desde una altura de 60 m. Analiza los datos y antes de completarlos responde las preguntas.

Tiempo (s)	0	0.5	1	2	2.5	3	3.5	4
Distancia recorrida en la caída (m)	0	1.225	4.9	19.6				
Altura (del suelo al techo) (m)	60							

Nota histórica

En el siglo XVI, desde la torre de Pisa, Galileo Galilei dejaba caer objetos de diversas masas y media el tiempo que empleaban en su recorrido. Hoy podemos describir sus descubrimientos al decir que, en caída libre, la relación entre la distancia recorrida por un objeto y el tiempo que emplea se modelan mediante una ecuación cuadrática.

a) Estima el tiempo en que tarda la pelota en llegar al suelo.

b) Explica tu procedimiento en el cuaderno.

c) Revisa los datos que están en la tabla. Señala la ecuación que se corresponde con los valores en la tabla.

$d = 4.9t$ $\quad d = (t + 5)^2$ $\quad d = 4.9t^2$ $\quad d = t^2 + 5$

d) Completa la tabla y verifica tu estimación.

Actividad 28. Lee la información y desarrolla lo que se indica.

En otro experimento de caída libre, se deja caer la misma pelota, la ecuación que indica la distancia recorrida después de t segundos es $d = 4.9t^2 + 8t$. Completa la tabla con los valores de la distancia recorrida por la pelota.

Tiempo (s)	0	0.5	1	2	2.5	3	3.5	4	4.5
Distancia recorrida en la caída (m)									

- Escribe, en el cuaderno, una hipótesis sobre cuál es la diferencia en la forma en la que se dejó caer la pelota en los dos experimentos.

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten de qué manera seleccionaron la ecuación que modela la primera situación de caída libre y argumenten sobre qué estimaciones les parecen más adecuadas. Presenta al grupo tu hipótesis y escucha las de los demás. Obtengan una conclusión con la ayuda del profesor.**

Consolido mis competencias

Actividad 29. Lleva a cabo lo que se pide.

En la simulación de un experimento, hecho en la Luna, se lanza hacia arriba un objeto esférico. La altura h del objeto, en metros, después de t segundos está dada por la fórmula $h = 6t - 0.8t^2$. Completa la tabla.

Tiempo (s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Altura (m)									

a) ¿Entre qué valores está la altura máxima alcanzada por el objeto?

b) Justifica tu respuesta.

c) Encuentra otra aproximación de la altura máxima del objeto sustituyendo los valores con una cifra decimal.

Tiempo (s)	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9
Altura (m)									

d) ¿Entre qué valores está la altura máxima alcanzada por el objeto?

e) Calcula otra aproximación con dos cifras decimales. Justifica tu respuesta.

f) En la primera tabla, ¿qué significa el signo negativo de la altura? Explica tu respuesta.

g) Determina el tiempo que tarda en caer el objeto desde que fue lanzado. Explica, en el cuaderno, tu procedimiento.

- **Discute tus respuestas con tus compañeros y analicen la estrategia propuesta para resolver el problema. Escriban, en su cuaderno, una conclusión sobre la trayectoria que sigue este objeto en la simulación del lanzamiento.**

- **Analicen, en grupo, lo siguiente. Si el experimento se hiciera en la Tierra, ¿qué valor debería escribirse como coeficiente de la variable cuadrática?**

Consolido mis competencias

Actividad 30. Haz lo que se indica.

En la clase de ganadería de una secundaria técnica se requiere hacer un corral rectangular en el que el ancho sea dos metros menor que el largo. Completa la tabla con los datos que se piden.

Ancho (m)	Largo (m)	Perímetro (m)	Área (m²)
3			
4			
5			
7.5			
	10		
	12		
	18.2		
			255
		7.4	
			440
		105.2	

TIC Explora www.redir.mx/matfort3-048 Indica cuáles son las cantidades relacionadas en la situación y escribe una conclusión en tu cuaderno.

a) Explica cómo calculaste el ancho y el largo a partir del perímetro. ______

b) Explica cómo calculaste el ancho y el largo a partir del área. ______

c) Si se representa la longitud del ancho con la literal *a*, ¿qué expresión algebraica representa la longitud del largo? ______

d) Completa la ecuación con la que se calcula el perímetro del rectángulo en el que el ancho mide *a* metros. $P =$ ______

e) Completa la ecuación con la que se calcula el área del mismo rectángulo.

$A =$ ______

◆ **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Justifiquen sus procedimientos de resolución y comenten si coinciden las ecuaciones que escribieron para el área y el perímetro del corral.**

Actividad 31. Lee el texto y completa la tabla. Responde y justifica en el cuaderno.

La distancia de frenado de un automóvil es la que recorre desde que se pisa el freno hasta quedar completamente parado. Para un automóvil que lleva una velocidad de *v* kilómetros por hora, se puede aproximar la distancia *d* (en metros) de frenado con la ecuación:

$$d = \frac{v^2}{170}$$

a) Calcula la distancia de frenado para las velocidades que se indican en la tabla.

Velocidad *v* (km/h)	0	20	40	60	70	80	90	100
Distancia de frenado *d* (m)								

b) El conductor de un automóvil que va a 75 km/h ve a otro vehículo parado en medio de la carretera. Cuando el conductor comienza a frenar, el otro automóvil está a una distancia de 40 m. ¿Alcanzará a frenar a tiempo?

c) Si una persona va conduciendo a 110 km/h, ¿cuál es la distancia mínima a la que puede estar un objeto frente a él para que alcance a frenar sin golpearlo?

d) Otra persona ve al automóvil que está en medio de la carretera y empieza a frenar cuando se encuentra a una distancia de 25 m. ¿Cuál es la velocidad máxima que puede llevar este automovilista para evitar tener una colisión?

e) Si la velocidad a la que va un automóvil se duplica, ¿qué ocurre con la distancia de frenado? Selecciona la opción correcta.

Se mantiene igual. Se duplica.

Aumenta cuatro veces. Aumenta ocho veces.

◆ **Discutan si la fórmula para calcular la distancia de frenado es válida para cualquier situación en la que un conductor vaya manejando. Escriban sus conclusiones al respecto.** ______

Consolido mis competencias

Actividad 32. Trabaja con un compañero. Lean la información y efectúen lo que se pide.

Las dos torres de un puente colgante están a 140 m una de la otra. Si se toma como referencia al punto más bajo del cable, se puede modelar la altura de cada punto del cable con la ecuación $h = \frac{1}{490}x^2 + 10$. Completen la tabla.

Distancia al punto más bajo del cable (m)	0	5	10	15	20	25	30
Altura (m)							

a) ¿Cuál es el valor de h cuando $x = 7.5$? __________

b) Escriban la interpretación de este valor. __________

c) ¿Cuál es el valor de h cuando $x = 10$? __________

d) Escriban la interpretación de este valor. __________

e) Completen la tabla para algunos valores negativos de la variable x. __________

Distancia al punto más bajo del cable (m)	−5	−10	−15	−20	−25	−30	−35
Altura (m)							

f) ¿Cuál es la interpretación de los valores negativos para x? __________

g) ¿Cuál es la altura de cada torre? Justifiquen su respuesta. __________

- **Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten y argumenten sus procedimientos. Revisen sus respuestas de la sección "Activo mis competencias". Lean la información y escriban una conclusión en el cuaderno.**

Formalización. Las relaciones de **variación cuadrática** entre dos conjuntos de cantidades son representadas mediante una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Los valores que corresponden a la ecuación se muestran en una tabla en la que se puede obtener, de forma aproximada, el **valor máximo** o **mínimo** para la cantidad representada por y, y los valores aproximados de x con los que el valor de y es igual a 0.

1.6 Conocimiento de la escala de la probabilidad

Conozco la escala de la probabilidad. Analizo las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

Cálculo mental

a) 10% de 215 __________

b) 10% de 318.5 __________

c) 5% de 20 __________

d) 20% de 120 __________

Activo mis competencias

En una feria regional organizan un juego de azar que consiste en lanzar un par de dados de seis caras y sumar los puntos que se obtengan en cada cara. Varias personas se ilusionaron pues sólo había que arriesgar $600.00 por cada oportunidad. En cada premio se indica cuánto deben sumar las caras de los dados para ganarlos. Analiza la imagen, responde y argumenta en tu cuaderno.

a) Una persona afirma que está esperando a que pasen al menos tres participantes a los que les corresponda un premio pequeño, de esta forma aumentarán sus probabilidades de obtener el reproductor de discos o la pantalla plana. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación?

b) Otra persona hizo este cálculo: "Hay 11 resultados posibles, en dos de ellos obtengo premios muy buenos. Entonces, si juego tres veces tengo 50% de probabilidad de obtener un premio que valga la pena". ¿Qué opinas sobre el razonamiento de esta persona?

c) ¿Es posible obtener más de un premio en una sola tirada? ¿Y no obtener premio?

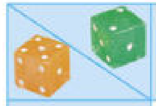
d) ¿Qué premio se repetirá más veces?

- **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Discutan sus argumentos y decidan cuáles son adecuados.**

Consolido mis competencias

Actividad 33. Trabaja con un compañero. Hagan lo que se indica.

a) Completen la tabla con todos los resultados posibles al lanzar dos dados.

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)					
2			(2, 3)			
3		(3, 2)				
4						
5	(5, 1)					
6						

Recuerda

La probabilidad se obtiene por medio del cociente de los resultados favorables entre el total de resultados posibles.

b) Respondan lo que se pide.

- ¿Cuántos resultados posibles hay? __________
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener el resultado (2, 3)? __________
- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de lo que se obtuvo en los dados sea 8? __________
- Expliquen cómo lo obtuvieron. __________

c) Calculen la probabilidad de los eventos que se indican en la tabla. Expresen cada una con una fracción, con un número decimal y como un porcentaje.

Evento	Probabilidad		
	Como cociente	Número decimal	Porcentaje
La suma de los dados es 8 o 9			
La suma de los dados es mayor que 10			
La suma de los dados es mayor que 12			

◆ Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Analicen los procedimientos que siguieron para expresar una probabilidad como fracción, con un número decimal y con un porcentaje. Escriban una conclusión en el cuaderno.

Consolido mis competencias

Actividad 34. Trabaja con un compañero. Completen la tabla de acuerdo con los resultados del juego de la sección "Activo mis competencias". Expresen la probabilidad en la forma que les parezca conveniente. Los premios hacen referencia a lo que puede ocurrir al tirar una vez los dos dados.

Premio	Resultados favorables	Probabilidad
		
		
 y 		
 y 		

a) Lleven a cabo lo que se indica. Respondan y justifiquen en el cuaderno.

- Escriban un evento relacionado con el juego cuya probabilidad expresada con un número decimal sea 1.
- ¿Cómo se expresa esta probabilidad con una fracción?
- ¿Cómo se expresa esta probabilidad con un porcentaje?
- Escriban un evento relacionado con el juego cuya probabilidad sea de 0%.
- ¿Cómo se expresa esta probabilidad con una fracción?
- ¿Cómo se expresa esta probabilidad con un número decimal?

◆ Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Revisen la forma en la que representaron la probabilidad, justifiquen sus respuestas, expongan sus dudas y aclárenlas con la ayuda del profesor. Entre todos respondan, en su cuaderno, lo siguiente. Si no es posible hacer lo que se pide expliquen por qué.

- Escriban un evento que tenga probabilidad igual a 2.
- Anoten un evento con una probabilidad igual a 50%.

- Escriban un evento que tenga probabilidad igual a 150%. ______

______

- Lean y discutan la información.

Formalización. En un experimento aleatorio se llama **espacio muestral** al conjunto de todos los resultados posibles.

Un **evento** es cualquier conjunto de resultados posibles. En el caso de los eventos los resultados posibles que lo conforman se llaman también resultados favorables. Por ejemplo, en el caso del juego de la feria, el evento "ganar un paquete de gomitas" tiene seis resultados favorables: (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1).

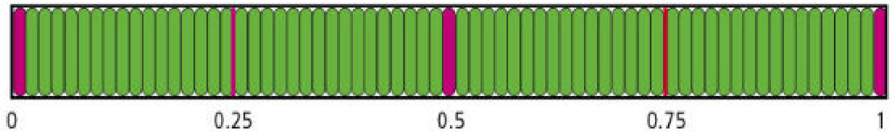
Un **evento imposible** es aquel que no tiene resultados favorables y su probabilidad es 0 o 0%.

Un **evento seguro** es aquel que se compone de todos los resultados posibles, su probabilidad es 1 o 100%.

La probabilidad de cualquier evento en un experimento aleatorio está entre 0 y 1 o entre 0% y 100%.

Actividad 35. Reúnete con un compañero y señalen con una flecha la probabilidad aproximada que corresponde a cada evento.

La escala de la probabilidad



El evento tiene escasa probabilidad de ocurrir.	El evento tiene la misma probabilidad de ocurrir que de no ocurrir.	Es más probable que el evento no ocurra a que sí.
Es casi seguro que el evento ocurra.		Es más probable que el evento ocurra a que no ocurra.

a) Consideren el experimento aleatorio de lanzar dos dados y observar el producto de los números que se obtienen. Escriban, en el cuaderno, un ejemplo de cada tipo de evento.

b) Para este experimento aleatorio, indiquen un evento cuya probabilidad de ocurrir sea mayor a $\frac{1}{2}$.

Consolido mis competencias

Actividad 36. Trabaja con un compañero. Consideren el experimento aleatorio de lanzar dos dados y observar el número que se obtiene en cada cara. Completen la tabla y respondan lo que se pide.

Evento	Resultados favorables	Probabilidad
A: "el producto de los números es igual a cuatro".		
B: "la suma de los números es igual a cuatro".		
C: "el producto de los números es igual a 12".		
D: "la suma de los números es igual a 10".		
E: "el producto de los números es igual o menor que 13".		
F: "el producto de los números es mayor que 13".		

a) ¿Qué eventos ocurren, entre los de la tabla, si se tiran los dados y se obtiene (1, 4)? ______

b) ¿Cuáles ocurren si se obtiene (5, 5)? ______

c) ¿Cuáles son los resultados en común de los eventos **D** y **F**? ______

d) ¿Con qué resultados posibles ocurren simultáneamente los eventos **A** y **B**? ______

e) ¿Cuáles son los resultados en común de los eventos **E** y **F**? ______

f) Escriban otros eventos que cumplan con lo que se pide.

- Escriban dos eventos que no tengan resultados en común. ______

Nota histórica

Galileo Galilei (1564-1642) en su obra "Sobre la puntuación en tiradas de dados" calculó el número de resultados posibles al tirar tres dados y de cuántas maneras se puede obtener cada una de las puntuaciones entre 3 y 18. Muchos escritores anteriores dieron respuestas erróneas de estos problemas. Efectúa los cálculos y discute los resultados con tus compañeros.

- Escriban otros dos eventos que sí tengan resultados en común. ______

- Anoten dos eventos que no tengan resultados en común, pero que entre los dos contengan a todo el espacio muestral. ______

- Escriban dos eventos que tengan resultados en común y que entre los dos contengan a todo el espacio muestral. ______

◆ **Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Escriban una conclusión sobre el significado de que "dos eventos ocurran simultáneamente". Lean y discutan la siguiente información. Después, respondan lo que se pide.**

Formalización. En un experimento aleatorio dos eventos son **mutuamente excluyentes** entre sí cuando no tienen resultados favorables en común.

Dos eventos son **complementarios** entre sí cuando no tienen resultados favorables en común y entre los dos contienen a todos los resultados posibles.

El evento complementario de un evento **A** se denota como $\mathbf{A^c}$.

- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran dos eventos complementarios? ______

- La probabilidad de un evento **D** es igual a 0.81. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra $\mathbf{D^c}$? ______

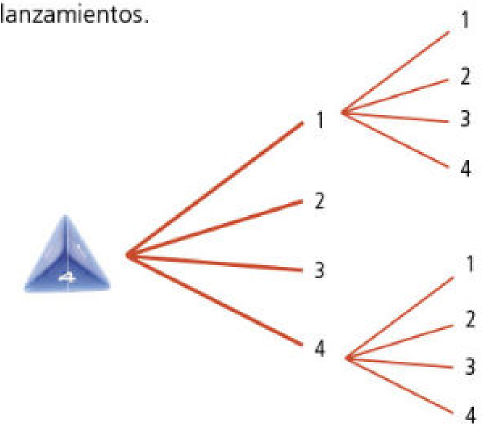
- Expliquen si dos eventos mutuamente excluyentes son complementarios. ______

- Expliquen si dos eventos complementarios son mutuamente excluyentes. ______

Consolido mis competencias

Actividad 37. **Trabaja en equipo. Consideren el experimento aleatorio de lanzar tres veces un dado de cuatro caras. Hagan lo que se indica.**

a) Analicen parte del diagrama de árbol que corresponde a los dos primeros lanzamientos. Elaboren, en el cuaderno o en una cartulina, el diagrama de árbol que corresponde a tres lanzamientos.



TIC Explora www.redir.mx/matfort3-057, selecciona el menú "Azar y probabilidad" y elige tres experimentos de los que aparecen en la primera columna. Responde, en el cuaderno, las preguntas y discute tus procedimientos con tus compañeros.

b) ¿Cuál es la probabilidad del evento "en la tercera tirada se obtiene 4"? Expliquen su respuesta. ______

c) Si se sabe que en las dos primeras tiradas se obtuvo 4, ¿cuál es la probabilidad de que en la tercera tirada también se obtenga 4? ______

d) Al tirar cinco veces un dado, en todas se obtiene 4 como resultado. ¿Cambia la probabilidad de obtener el mismo resultado en la sexta tirada? Expliquen su respuesta. ______

e) Para ganar un juego se necesita que la suma de dos dados de seis caras sea igual a 7. ¿Cambian nuestras posibilidades si sabemos el resultado de 10 tiradas anteriores? Expliquen su respuesta. ______

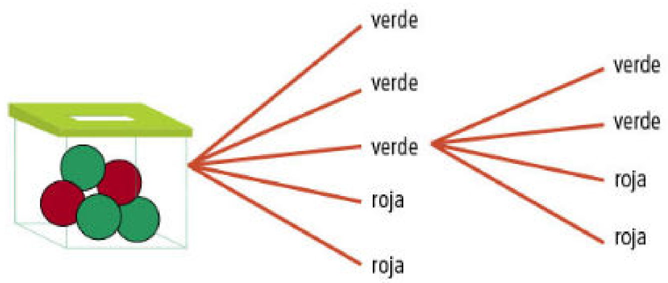
f) ¿Y si sabemos el resultado de las últimas 10 000 tiradas? Expliquen. ______

◆ **Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten la relación entre el diagrama de árbol que trazaron y sus respuestas. Externen sus dudas y dificultades con la finalidad de aclararlas.**

Consolido mis competencias

Actividad 38. Trabaja en equipo. En una urna hay tres bolas verdes y dos rojas. Se extrae una bola de la urna y se anota su color, pero no se regresa a la urna. La operación se repite dos veces más. Respondan, en su cuaderno, lo que se pide.

a) Completen el diagrama de árbol en el cuaderno o en una cartulina y respondan lo que se indica.



b) ¿Cuántos resultados posibles tiene el espacio muestral?

c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola verde en la tercera extracción?

d) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola verde en la segunda extracción?

e) Si se sabe que en la primera extracción se obtuvo una bola verde, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola verde en la segunda extracción?

f) Si se sabe que en la primera extracción se obtuvo una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola verde en la tercera extracción?

g) Si se tiene alguna información sobre las extracciones anteriores, ¿esto afecta la probabilidad de los resultados? Justifiquen su respuesta en el cuaderno.

◆ **Comparen sus respuestas y procedimientos de solución con las de sus compañeros. Lean la información y respondan, en el cuaderno, lo que se pide.**

Formalización. En un experimento aleatorio dos eventos son **independientes** cuando la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

- Describan dos eventos independientes y dos eventos que no sean independientes para alguno de los experimentos que han trabajado en esta lección.
- Revisen sus respuestas de la sección "Activo mis competencias". Indiquen si tuvieron necesidad de corregir alguna de las respuestas o si modificarían alguno de los procedimientos de solución.

1.7 Datos, poblaciones y encuestas

Diseño una encuesta o un experimento e identifico la población en estudio. Discuto sobre las formas de elegir el muestreo. Obtengo datos de una muestra y busco herramientas convenientes para su presentación.

Cálculo mental

a) 50% de 1 050: ________

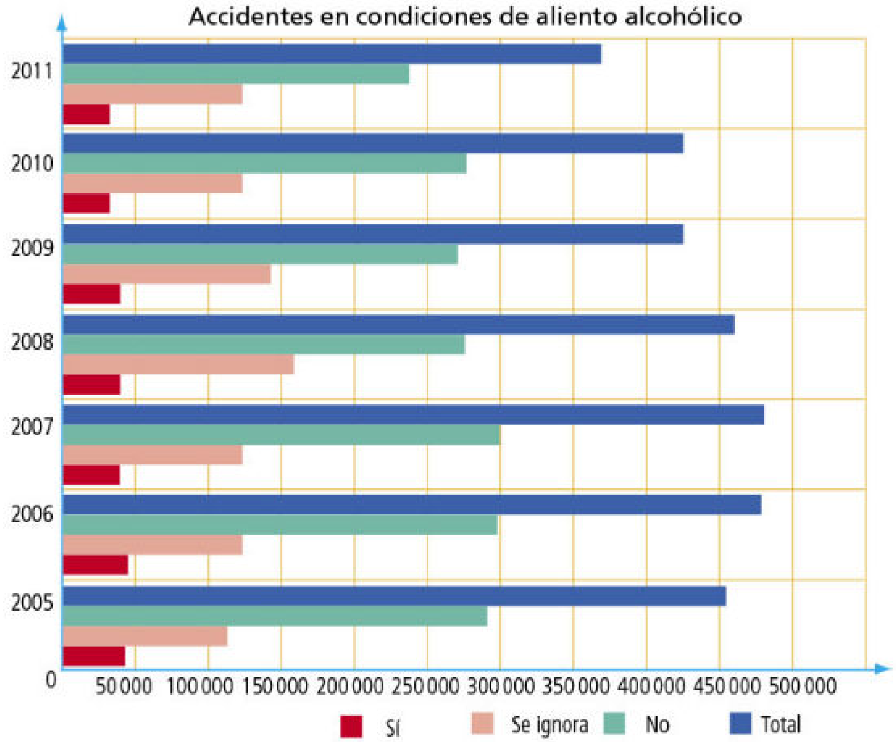
b) 30% de 3 800: ________

c) 15% de 5 600 ________

d) 25% de 8 200: ________

Activo mis competencias

La gráfica muestra datos del Inegi acerca de los accidentes de tránsito terrestre en la República Mexicana, ocurridos entre 2005 y 2011. En ésta se registra el total de accidentes (Total), el número de accidentes en los que uno de los conductores tenía aliento alcohólico (Sí), en los que ninguno tenía aliento alcohólico (No) y en los que no se tiene esa información (Se ignora).



Tomado de: Inegi, "Registros administrativos", "Accidentes de tránsito terrestre en zonas urbanas y suburbanas", disponible en www.inegi.org.mx/sistemas/olap/proyectos/bd/consulta.asp?p=14744&c=23705&s=est&cl=4#. (Consulta: 10 de julio de 2013).

a) Analiza la gráfica y responde en tu cuaderno.

- ¿En qué año notas una diferencia significativa entre los accidentes ocurridos en condiciones de aliento alcohólico y los que no estaban en esas condiciones?

- ¿Cuáles fueron los tres años en los que hubo menor cantidad de accidentes ocurridos en condiciones de aliento alcohólico?
- ¿Cuáles son los dos años en los que hubo mayor cantidad de accidentes?
- Indica un promedio aproximado para el número de accidentes por año.

b) Responde con base en los datos. La tabla muestra los mismos datos que la gráfica.

Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Total	452 233	471 272	476 279	466 435	428 467	427 267	387 185
Sí	39 828	41 512	40 493	39 615	36 729	33 160	29 469
No	292 376	297 748	300 562	268 591	253 053	262 259	230 147
Se ignora	120 029	132 012	135 224	158 229	138 685	131 848	127 569

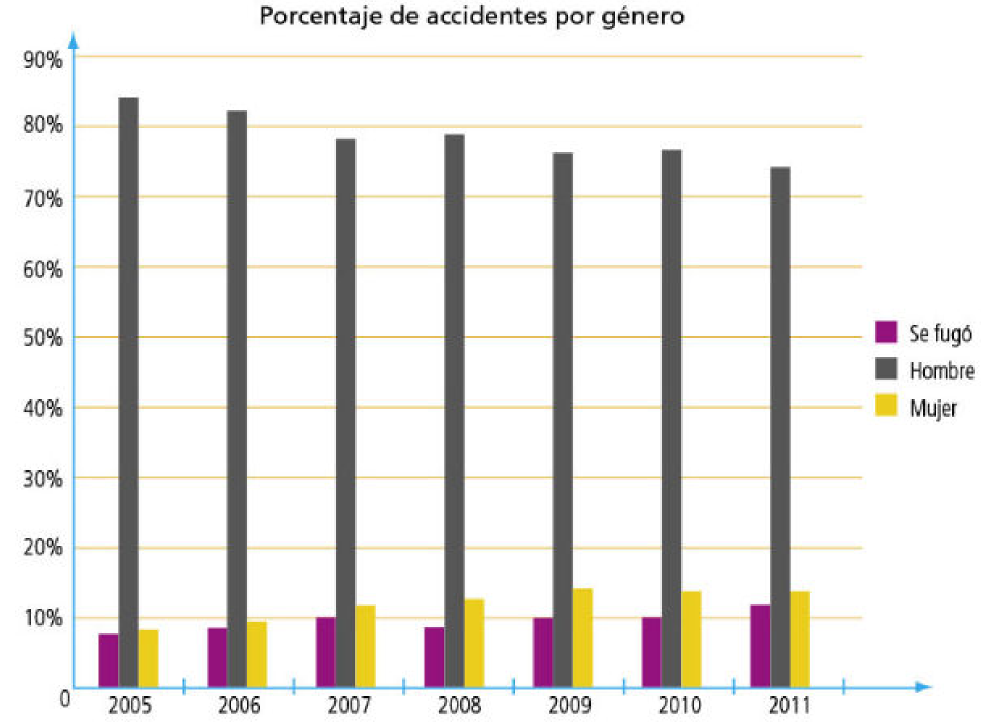
- ¿En qué año observas una diferencia significativa entre los accidentes ocurridos en condiciones de aliento alcohólico y los que no estaban en esas condiciones? ____
- ¿Cuáles fueron los tres años en los que hubo menor cantidad de accidentes ocurridos en condiciones de aliento alcohólico? ____
- ¿Cuáles son los dos años en los que hubo mayor cantidad de accidentes? ____
- Obtén el promedio de accidentes que hubo en condiciones de aliento alcohólico entre el 2005 y el 2011. ____
- Observa cómo se presentaron los datos, ya sea por medio de una gráfica o una tabla. ¿Cuáles son las ventajas de cada presentación? Para un análisis más profundo de los datos, ¿qué presentación es mejor?

◆ **Trabaja con un compañero para hacer un estudio en su escuela. Por ejemplo, ¿cuál es la estatura promedio de los alumnos? ¿Qué asignatura les gusta más? ¿Cuál es el deporte qué prefieren? ¿Qué calzado les gusta más, tenis, zapatos o botas? ¿Qué género musical es el que más les agrada?, etcétera.**

Consolido mis competencias

Actividad 39. Reúnete en pareja y resuelvan.

a) En el mismo estudio del INEGI acerca de los accidentes de tránsito terrestre se obtuvieron los siguientes datos respecto al género de los conductores.



b) Utilicen la tabla "Condiciones de aliento alcohólico" de la actividad de inicio y la gráfica anterior para llenar la tabla (si obtienen decimales, redondeen). Respondan en el cuaderno.

Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Total de accidentes							
Conductores hombres							
Conductores mujeres							
Se ignora							

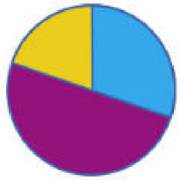
- ¿En qué año hubo mayor número de accidentes causados por conductores hombres?
- ¿En qué año hubo menor número de accidentes causados por conductores mujeres?

◆ **¿Coinciden sus respuestas? Comenten con sus compañeros y escriban sus conclusiones.**

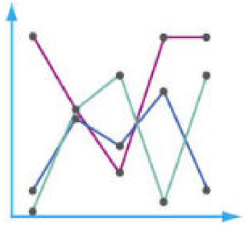
◆ **¿Cuándo conviene usar la tabla y cuándo la gráfica? ¿Qué detalles hay que cuidar en el uso de cada una?**

Actividad 40. Relaciona, mediante líneas, los siguientes tipos de gráficas con los datos que mejor se representen en ellas.

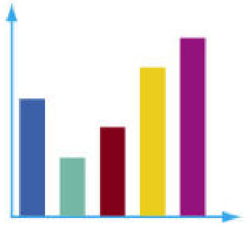
- Datos cuantitativos de una muestra de 100%



- Porcentajes



- Datos cuantitativos de una muestra cualquiera



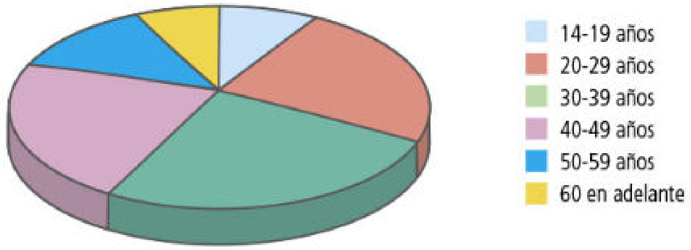
◆ **Retomen la pregunta con la que decidieron hacer su estudio. Ahora planeen cómo recabarán los datos. Investiguen dónde o a quién podrían acudir para recabar datos confiables. Si deciden recabar los datos mediante una encuesta, soliciten ayuda a su profesor e investiguen cómo deben diseñar la encuesta.**

◆ **Una vez que tengan los datos, decidan cómo los presentarán. Deben considerar que podrían presentar los datos en el periódico mural de la escuela. Pidan sugerencias al profesor encargado en ese momento.**

Consolido mis competencias

Actividad 41. Lee y responde.

El INEGI hizo un estudio nacional sobre el empleo de la población económicamente activa. La información se recopiló entre el 1er trimestre de 2005 y el 1er trimestre de 2008. Se obtuvieron datos sobre variables como el nivel de estudios, el género y la cantidad de personas económicamente activas que hay entre ciertos rangos de edad. Dicho estudio indicó que en el 1er trimestre de 2008 había 43 320 677 personas económicamente activas en todo el país.



Tomado de: INEGI, "Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo, enero-marzo 2008".

TIC Entra a www.redir.mx/matfort3-063 y utiliza este graficador para elaborar tu reporte sobre el estudio que hayas decidido emprender. Elige la representación más adecuada para tus datos.

a) Investiga qué significa *población económicamente activa* y anótalo enseguida. ______

______

b) ¿A qué se refiere el texto con el término *variables*? ______

______

c) ¿Qué variable corresponde a la gráfica? ______

d) ¿A qué rango de edades pertenece el mayor grupo de personas económicamente activas? ______ ¿Y a qué rango de edades el menor grupo? ______

e) Encuentra dos rangos de edades en los que se ubique aproximadamente la mitad de las personas.

f) ¿Es posible hacer una tabla que represente la información contenida en la gráfica anterior? Argumenta tu respuesta. ______

______

◆ **Compara tus respuestas con las de tus compañeros de grupo.**

Consolido mis competencias

Actividad 42. Dividan al grupo en dos equipos y elijan un estudio de los que se proponen.

a) Hagan una encuesta acerca del tiempo que tardan en llegar de la casa a la escuela.

- Elaboren, en su cuaderno, una tabla tomando intervalos de tiempo de 10 min en 10 min.
- Hagan una gráfica de polígono de frecuencia con los datos de su tabla.
- Obtengan, con la ayuda de la gráfica, el promedio aproximado del tiempo que tardan en llegar a la escuela. ______________________
- Calculen la media, la mediana y la moda. Decidan cuál representa mejor los datos. ______________________
- ¿Qué otras preguntas harían en este estudio para conocer más acerca del trayecto de sus compañeros de la casa a la escuela? ______________________

b) Lleven a cabo un estudio acerca del deporte que más se practica en la escuela. Antes reflexionen sobre lo siguiente y respondan en el cuaderno.

- ¿A cuántas personas deben preguntarles? ¿Por qué?
- ¿Cómo deben seleccionar la muestra? Es decir, ¿a quién le preguntarán?
- Formulen más preguntas en su cuaderno. Aquí tienen algunos ejemplos.
  ¿Cuál es el deporte más popular en tu grupo?
  ¿Cuál es el deporte más popular por género?
  ¿Qué cantidad de compañeros prefieren cada deporte?
  ¿Cuántas horas a la semana lo practican?
  ¿Cuántos deportes hubo en total?
- Organicen los datos en una tabla. Elaboren una gráfica de polígono de frecuencia.
- Con la ayuda de la gráfica, concluyan qué medida representa mejor los datos: la media, la moda o la mediana.

◆ **Organicen una presentación ante el grupo del estudio que hizo cada equipo. Hagan carteles para presentar mejor su trabajo.**

◆ **Con ayuda del profesor, concluyan cuáles son las ventajas o desventajas de los trabajos presentados, indiquen a los equipos que eligieron mejor su muestra, analicen por qué la decidieron así o qué cambios sugieren para mejorar la presentación.**

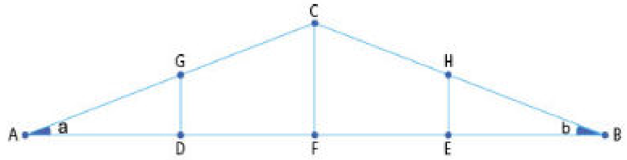
¿Qué tanto sé?

Selecciona la opción correcta.

1. **El señor Naranjo desea construir una cisterna de base cuadrada con capacidad de 36 m³ y profundidad de 4 m. Si x representa la longitud del lado de la base, ¿qué ecuación corresponde a la situación anterior?**

   a) $4x^2 = 36$ b) $4 + x^2 = 36$
   c) $x^2 = 4 + 36$ d) $x^2 = 4(36)$

2. **En el siguiente triángulo, los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{EB}$ son del mismo tamaño; los ángulos a y b miden lo mismo, y los segmentos $\overline{DG}$, $\overline{FC}$ y $\overline{EH}$ son perpendiculares al $\overline{AB}$.**



¿Qué afirmación es falsa?

   a) **D** y **E** son los puntos medios de los segmentos **AF** y **FB**, respectivamente.
   b) Los triángulos **AGD** y **BHE** son congruentes.
   c) Los triángulos **AGD** y **BCF** son semejantes.
   d) $\frac{CB}{HB} = \frac{FC}{DG}$

3. **Dos triángulos rectángulos, A y B, tienen un lado de 5 cm; A tiene un ángulo de 30° y B, uno de 60°. ¿Cómo son entre sí los triángulos A y B, y por qué?**

   a) Congruentes, pues dos de sus ángulos son iguales y uno de sus lados también.
   b) Semejantes, pues sus tres ángulos son iguales.
   c) Congruentes, pues ambos tienen ángulos de 60°, 30° y 90°.
   d) Semejantes, pues ambos son rectángulos y tienen un lado de 5 cm.

4. **La tabla de la derecha muestra cómo se relacionan la cantidad de agua en una alberca y el tiempo transcurrido desde que empezó a llenarse.**

Litros de agua (x)	Minutos (t)
750	15
1 000	20
1 250	25
1 500	30
1 750	35

¿Qué ecuación corresponde a la situación anterior?

   a) $15x + 5 = 750t + 250$ b) $15x = 750t$
   c) $x + 5 = t + 250$ d) $750x = 15t$

5. **Se sabe que un evento A es casi seguro que ocurra. ¿Qué afirmación es verdadera?**

   a) La probabilidad de que ocurra **A** es 0. b) La probabilidad de que ocurra **A** es 1.
   c) La probabilidad de que ocurra **A** es muy cercana a 0. d) La probabilidad de que ocurra **A** es muy cercana a 1.

6. ¿Qué inciso muestra dos eventos mutuamente excluyentes, **M** y **N**, para el lanzamiento de tres monedas?

a) Evento **M**: tres soles — Evento **N**: al menos un águila
b) Evento **M**: tres caras iguales — Evento **N**: tres águilas
c) Evento **M**: al menos un sol — Evento **N**: al menos un águila
d) Evento **M**: al menos dos soles — Evento **N**: caras distintas

7. Se suelta un objeto desde cierta altura con una velocidad inicial. La distancia recorrida por el objeto (d) y el tiempo transcurrido desde que se soltó (t) se relacionan mediante la ecuación $d = 5t^2 + 10t$, donde d se mide en metros y t, en segundos. ¿Qué tabla corresponde a la situación anterior?

a)

t	d
1	5
2	20
3	45

b)

t	d
1	15
2	30
3	55

c)

t	d
1	15
2	40
3	75

d)

t	d
1	15
2	30
3	45

8. La tabla de la derecha muestra el comportamiento de llenado de un recipiente en forma de cono. ¿Qué expresión corresponde a la altura del agua después de t segundos?

Tiempo (segundos)	Altura del agua (centímetros)
1	1
2	4
5	37

a) $t^2 + 3t - 3$
b) $2t^2 - 3t + 2$
c) $2.5t^2 - 4.5t + 3$
d) $t^2 + 4t - 8$

Con base en la siguiente situación, contesta las preguntas 9 y 10.

La tabla muestra el resultado de una encuesta a deportistas, respecto a la calidad de una determinada marca de bebida hidratante.

En su opinión, la calidad del producto es…	Excelente	Buena	Regular	Mala
Frecuencia	15	25	12	8

9. ¿Qué parte de la muestra opina que la calidad del producto es buena o excelente?

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{2}{3}$

10. El fabricante quiere hacer evidente que menos de la mitad de los encuestados consideran que la bebida es regular o mala. ¿Qué tipo de recurso le conviene usar para presentar los datos?

a) Una tabla.
b) Una gráfica de barras.
c) Una gráfica circular.
d) Un polígono de frecuencias.

Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas con las del grupo y valídalas.

Desafío del bloque

La suerte de los números

En un país, cada semana se imprimen 100 000 boletos para la lotería nacional (del 00000 al 99999). Cada boleto cuesta 10 oros y tiene un número de cinco cifras (incluyendo ceros) que participa en el sorteo; por ejemplo, 00107 o 53790. Cada cifra del número ganador (unidades, decenas, centenas…) se determina aleatoriamente, extrayendo de una urna bolas numeradas del 0 al 9.

Los criterios de premiación son los siguientes.

Premio	Criterio	Monto (oros)
A	Las cinco cifras del número ganador	500 000
B	Las tres últimas cifras del número ganador (unidades, decenas y centenas)	1 000
C	La última cifra del número ganador (unidades)	20
D	Disparidad con el número ganador (si el número ganador es par, todos los boletos impares reciben premio; si es impar, todos los boletos pares ganan)	5
E	Número de cinco cifras posterior al premiado (99 999 y 00 000 se consideran números consecutivos)	50 000
F	Número de cinco cifras anterior al premiado	50 000

Responde en tu cuaderno.

Pregunta 1
- Jacinto compró, para el sorteo de la próxima semana, los primeros 10 boletos de la serie: del 00001 al 00010. Explica por qué la probabilidad de que gane el premio C es 1.

Pregunta 2
- De los 10 boletos que compró Jacinto, cinco ganarán el premio D. Explica por qué.

Pregunta 3
- ¿Cuántos boletos es necesario comprar para asegurar el premio B? Justifica tu respuesta.

Pregunta 4
- Para cada boleto, algunos premios son eventos mutuamente excluyentes, pero hay otros que sí pueden ocurrir de manera simultánea. Da un ejemplo de cada caso.

Pregunta 5
- Si esta semana el número ganador fue 09075, ¿qué boleto obtendrá los premios D y E a la misma vez? ¿Cuántos boletos obtendrán los premios B y C de forma simultánea?

Al terminar, efectúa la autoevaluación del bloque 1 en la página 245.

BLOQUE 2

Aprendizajes esperados

El estudiante:

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

El razonamiento matemático puede ser considerado como la combinación de dos habilidades: la intuición y la ingenuidad.

Alan Turing

2.1 Ecuaciones cuadráticas

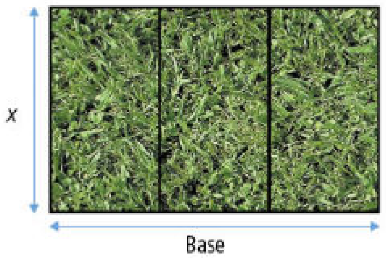
Uso ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y las resuelvo usando la factorización.

Activo mis competencias

Trabaja en equipo. Lean la información y respondan las preguntas.

En un parque requieren construir un área, para día de campo, de forma rectangular con una superficie de 2 400 m² que debe estar dividida en tres secciones rectangulares, cada una con la misma área como se muestra en el diagrama. Para ello se tienen 280 m de cerca, los cuales se utilizarán para las tres secciones; si se usara toda (no debe sobrar cerca), ¿qué longitud deben tener los lados del parque?

Hagan las operaciones en su cuaderno y, de ser necesario, utilicen calculadora.



a) ¿Cómo se obtiene el área de un rectángulo? ______________________

¿Y el perímetro? ______________________

b) ¿Cuáles son los números enteros cuyo producto es igual a 24? ______________________

c) Propongan números enteros cuyo producto sea 2 400 m².

____

d) Elaboren, con los valores obtenidos y en su cuaderno, una tabla con las siguientes columnas:

"Longitud del lado x", "Longitud de la base", "Área" y "Cantidad de cerca utilizada".

e) Analicen los resultados de la tabla y respondan cuál es la longitud de x y de la base.

x = __________ base = __________

- Comparen sus respuestas con las del grupo. Identifiquen las estrategias propuestas, como analizar casos particulares (con la elaboración de la tabla), y comenten en qué otros contextos son útiles estas estrategias. Discutan si se puede plantear una ecuación para obtener la respuesta y, en dado caso, escríbanla y resuélvanla.
- Comenten qué criterios considerarían para decidir en dónde construir un área para día de campo.

Cálculo mental

a) $9x = 54$; x = __________

b) $8x = -72$; x = __________

c) $x - 15 = 60$; x = __________

d) $4x - 12 = 28$; x = __________

e) $-x + 25 = 75$; x = __________

Consolido mis competencias

Actividad 1. Trabaja en pareja. Lean la información y respondan. Expliquen, en su cuaderno, el procedimiento que llevaron a cabo para encontrar la respuesta.

Reflexiona

Si un producto es cero, entonces uno de los factores es cero, es decir, si $a \times b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.
El producto de cualquier número por cero, es cero, $c \times 0 = 0$.

a) El doble del cuadrado de un número es igual a 12 veces este número. ¿Cuál es el número?

- ¿Cuál es la incógnita? __________
- Propongan una expresión algebraica para representar las condiciones del enunciado. __________
- ¿Qué sucede si sustituyen en la ecuación el valor de la incógnita por 0? __________
- Si existen otros valores que satisfagan la ecuación, ¿cuáles son? __________
- ¿Cuáles son las soluciones? __________

b) El área de un triángulo rectángulo cuyos **catetos** miden lo mismo menos el triple de la longitud de un cateto es igual a cero. ¿Cuál es el área del triángulo? Respondan en su cuaderno.

Recuerda

La división entre cero no está definida. Es decir, para dividir algún número entre x, se debe estar seguro de que $x \neq 0$.

- Escriban una expresión algebraica para representar cada parte del enunciado: "la longitud de un cateto", "la longitud del otro cateto", "el área del triángulo rectángulo" y "tres veces la longitud de un cateto".
- Planteen, la ecuación que expresa las condiciones del enunciado.
- ¿Qué sucede si se sustituye en la ecuación el valor de $x = 0$? Justifiquen si 0 es una solución de la ecuación. Si existe otra solución, ¿cuál es?
- ¿Todos los valores obtenidos como solución de la ecuación resuelven el problema?
- Escriban un enunciado con su respuesta.

c) ¿Cuál es la longitud del lado de un cuadrado cuya área es igual al valor de su perímetro?

- Planteen una ecuación que exprese lo anterior. __________
- Escriban la ecuación anterior de dos formas, una en la que esté igualada a cero y otra en la que no esté igualada a cero. __________

Trabajen primero con la ecuación que está igualada a cero.

- Escriban la ecuación **factorizando** a x de un lado. __________ $= 0$
- Igualen a cero cada factor de la expresión anterior $x = 0$ y __________ $= 0$
- Las soluciones son __________ y __________
- De esas dos soluciones sólo les interesa una. Expliquen, en su cuaderno, el motivo.
- ¿Cuál es la longitud de los lados del rectángulo? __________
- Verifiquen que efectivamente es solución. __________

Consideren ahora la ecuación que no está igualada a cero.

- Ésta tiene las mismas soluciones que la anterior, ¿por qué? __________
- Verifiquen que el cero es una solución de la ecuación. __________
- Si $x \neq 0$, entonces se divide cada miembro entre x, así se obtiene $x =$ __________

d) El producto de dos números pares consecutivos positivos es 168. ¿Qué números son?

- Escriban la expresión general que denota un número par. __________
- Escriban la expresión para indicar un número par consecutivo al anterior. __________
- Escriban la expresión que denote el producto de dos números consecutivos y simplifíquenla. __________
- Resuelvan la ecuación. Los números son __________

◆ **Comparen, con sus compañeros, los diferentes procedimientos que utilizaron. Lean la información y analicen si sus estrategias de solución concuerdan con ella. Expliquen qué tienen en común todas las ecuaciones que plantearon.**

Formalización. Una ecuación de segundo grado del tipo $ax^2 + bx = 0$.

Por ejemplo (1) $3x^2 + 28x = 0$

donde x es un número desconocido y a, b son constantes, se escribe como

$ax^2 = -bx$ (2) $3x^2 = -28x$

Las ecuaciones (1) y (2) son equivalentes, es decir, tienen las mismas soluciones y, para hallarlas, se puede seguir cualquiera de los dos métodos que a continuación se muestran.

Primer método. De $ax^2 + bx = 0$ factoriza x y se obtiene $x(ax + b) = 0$.
Por ejemplo $x(3x + 28) = 0$.
Como este producto es cero, entonces $x = 0$ o $ax + b = 0$.
Si $ax + b = 0$, entonces $x = -\frac{b}{a}$. En el ejemplo $x = -\frac{28}{3}$.
Entonces, las soluciones son $x = 0$ y $x = -\frac{b}{a}$. Es decir, $x = 0$ y $x = -\frac{28}{3}$.
Segundo método. En la ecuación $ax^2 = -bx$ observa que si $x = 0$, la ecuación se satisface, es decir, que una solución es $x = 0$.
Si $x \neq 0$, entonces al dividir entre x, se obtiene la siguiente ecuación $ax = -b$.
Al despejar x se obtiene que $x = -\frac{b}{a}$. En el ejemplo $\frac{3x^2}{x} = -\frac{28x}{x} = 3x = -28$, $x = -\frac{28}{3}$
Entonces, las soluciones son $x = 0$, y $x = -\frac{b}{a}$.
Con los dos métodos se obtienen las mismas soluciones.

Actividad 2. **Trabaja en equipo. En cada caso planteen una ecuación y completen los espacios en blanco para explicar el procedimiento usado para resolverla.**

a) El producto de dos números consecutivos es igual a cuatro veces el primero.

x y $x + 1$	Dos números consecutivos
	Cuatro veces el primer número
	Se propone la ecuación que represente el enunciado.
	Se desarrolla el miembro izquierdo de la ecuación.
	Se suma el inverso aditivo de x.
$x =$ o $x =$	Se obtienen las soluciones de la ecuación.

- Completen el enunciado con su respuesta.

Los dos números consecutivos pueden ser ____________

b) El área de un triángulo rectángulo con catetos iguales más tres veces la longitud de un cateto es igual a cuatro veces la longitud del cateto.

	La longitud de un cateto.
$\frac{x^2}{2} + 3x =$	
$\frac{x^2}{2} = x$	
$x^2 = 2x$	
	Se obtienen las soluciones de la ecuación.

- Escriban un enunciado con la solución. ____________

c) Ximena es tres años mayor que Angélica y el producto del doble de la edad de Angélica por la edad de Ximena es igual a 18 veces la edad de Angélica.

- Escriban la edad de Ximena en términos de la de Angélica. La edad de Angélica es x.

  Entonces, la edad de Ximena es ____________
- Anoten la expresión para el doble de la edad de Angélica. ____________
- Planteen la ecuación. ____________. Resuélvanla en su cuaderno.
- ¿Qué edad tiene cada una? ____________
- Ahora consideren como variable la edad de Ximena. Es decir, la edad de Ximena es x,

  entonces la edad de Angélica es ____________
- Escriban, en su cuaderno, la ecuación y resuélvanla. Formulen un enunciado con la respuesta.

d) Diego es un año mayor que Daniel y el producto del triple de la edad de Daniel por la edad de Diego es igual al doble de la edad de Daniel.

- Planteen una ecuación que exprese lo anterior. ____________
- ¿Qué edad tiene cada uno? ____________

◆ **Compartan sus reflexiones sobre los diferentes procedimientos que utilizaron. Lean la siguiente información, analícenla y expliquen qué tienen en común las ecuaciones que plantearon en la actividad 2 con las de la actividad 1. Expliquen por qué es conveniente efectuar todas las operaciones indicadas y reducir los términos semejantes.**

Formalización. Una ecuación de segundo grado del tipo

$$ax^2 + bx = cx \quad (1) \quad 4x^2 + 3x = 7x$$

donde x es un número desconocido y a, b, c son constantes, se puede escribir como

$$ax^2 + (b - c)x = 0 \quad (2) \quad 4x^2 + (3 - 7)x = 0$$

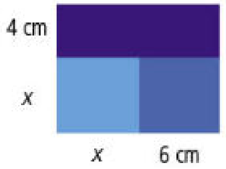
Las ecuaciones (1) y (2) son equivalentes.

La ecuación $ax^2 + (b - c)x = 0$ tiene la forma que estudiaste en la actividad 1. Las soluciones para ecuaciones de este tipo son

$x = 0$ y $x = \frac{c - b}{a}$ En el ejemplo $x = 0$ y $x = 1$

Consolido mis competencias

Actividad 3. Trabaja en pareja. Lean la información y respondan. En caso necesario, lleven a cabo el procedimiento en su cuaderno.



a) Un cuadrado de lado x fue modificado, a la base le aumentaron 6 cm y la altura 4 cm y así se obtuvo un rectángulo.

- ¿Qué dimensiones tiene el rectángulo? Base ________ y altura ________
- ¿Cuál es el área del rectángulo? ________

b) Si el área fuera $x^2 + 3x + 2$, exprésenla como un producto de binomios.

________________ $= x^2 + 3x + 2$

- ¿Cuántos centímetros aumentaron a cada lado? ________
- Expliquen cómo encontraron la factorización de $x^2 + 3x + 2$, ¿cómo supieron cuánto se le suma o resta a x? ________

c) Completen la tabla. La tercera columna se obtiene al multiplicar los binomios de la primera y segunda columna.

Primer binomio	Segundo binomio	Trinomio
$x + 4$	$x + 5$	$x^2 + 9x + 20$
		$x^2 + x - 20$
		$x^2 - x - 20$
		$x^2 - 9x + 20$

Observa

Para resolver una ecuación de segundo grado, primero debes llevar la ecuación a su forma general; es decir, un lado de la igualdad es cero, y en el otro lado hacer todas las operaciones posibles.

- Si la tercera columna se iguala a cero, se obtienen ecuaciones de segundo grado expresadas en su **forma general**. Encuentren la solución de cada una de las ecuaciones.

Trinomio	Soluciones
$x^2 + 9x + 20 = 0$	$x = -4$ y $x = -5$
$x^2 + x - 20 = 0$	y
$x^2 - x - 20 = 0$	y
$x^2 - 9x + 20 = 0$	y

d) Un cuadrado de lado x fue modificado para obtener un rectángulo de área $x^2 + 13x + 40$.

- ¿Qué dimensiones tiene el rectángulo? Base ________ y altura ________

- ¿Cuántos centímetros le aumentaron a cada lado?

____

- Si el área del rectángulo es 88 cm², planteen, en su cuaderno, una ecuación que exprese el área y resuélvanla.
- ¿Cuántos centímetros miden los lados del rectángulo anterior?

Base ________ cm y altura ________ cm.

Nota histórica

Los griegos resolvían algunas ecuaciones cuadráticas mediante aproximaciones. También interpretaban cada ecuación cuadrática como el área de un rectángulo y, en algunos casos, de un cuadrado. Investiga algún ejemplo y descríbelo en tu cuaderno.

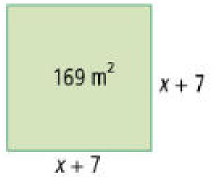
e) El área de un cuadrado es $x^2 + 12x + 36$. Por otro lado, su área también vale 121. ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado?

- Igualen las expresiones a cero y simplifiquen. ________
- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación anterior? ________
- Expresen $x^2 + 12x + 36$ como un producto de dos binomios.

$x^2 + 12x + 36 =$ ________________ $= 121$

- ¿Cuál es la longitud de los lados del cuadrado? ________

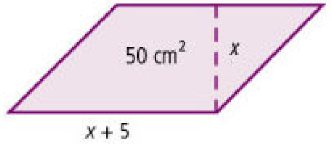
f) Expresen el área del cuadrado de la derecha con una ecuación.



____

- Escriban la solución de la ecuación y la longitud de cada lado del cuadrado. ________

g) ¿Cuál es la longitud de la base y la altura del siguiente paralelogramo?



Base ________ cm y altura ________ cm.

h) A un cuadrado de lado x se le aumentó un lado y se redujo el otro, quedando un rectángulo cuya área está dada por la expresión $x^2 + 4x - 32 = 64$. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo? Hagan, en su cuaderno, lo que se indica.

- Escriban el lado izquierdo de la ecuación como un producto de binomios.
- Dejen del lado izquierdo los términos de la ecuación $x^2 + 4x - 32 = 64$ e igualen a cero.

- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación de su respuesta anterior?
- ¿Cuántos centímetros miden los lados del rectángulo?

◆ **Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Compartan sus reflexiones sobre los diferentes procedimientos que utilizaron. Expliquen y escriban en su cuaderno qué pasos se deben seguir para resolver problemas del tipo $(x + a)(x + b) = c$.**

Formalización. Una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde x es un número desconocido y a, b, c constantes; se dice que está escrita en su **forma general**.

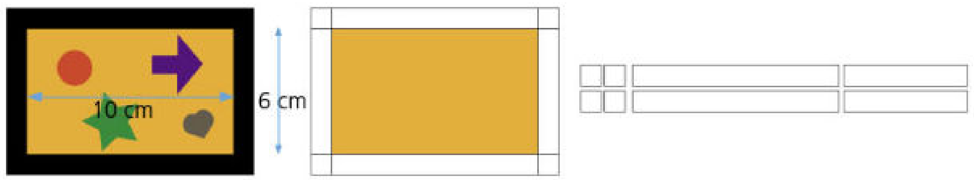
Para hallar las soluciones de una ecuación del tipo $(x + 8)(x - 4) = 64$, es conveniente llevarla a su forma general. Para ello

- se desarrolla el producto de binomios $(x + 8)(x - 4) = x^2 + 8x - 4x - 32$,
- se suman términos semejantes $x^2 + 8x - 4x - 32 = x^2 + 4x - 32$ y se obtiene $x^2 + 4x - 32 = 64$,
- se escribe la ecuación en su forma general, por lo que se iguala a cero; entonces la ecuación anterior es equivalente a $x^2 + 4x - 96 = 0$,
- una vez hecho esto, se escribe el trinomio como un producto de binomios $x^2 + 4x - 96 = (x - 8)(x + 12)$.

Entonces se escribe la ecuación como $(x - 8)(x + 12) = 0$ y las soluciones son $x = 8$ y $x = -12$.

Actividad 4. **Trabaja en pareja. Lean la información y respondan.**

a) Un dibujo de 10 cm de largo por 6 cm de ancho será enmarcado, para ello se necesitan ocho piezas como las que se muestran en el lado derecho de la siguiente figura. Se quiere determinar las medidas del marco para que el área de esas ocho piezas sea 132 cm².



Se utilizan piezas como las siguientes.

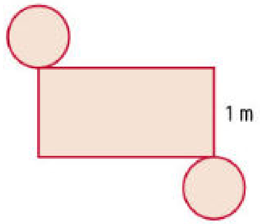
- Planteen una ecuación con la que obtengan las medidas de cada una de las piezas. ________________
- Expresen la ecuación anterior en su forma general. ________________
- ¿Qué más pueden hacer para simplificar la ecuación anterior? Escríbanlo. ________________
- ¿Cuáles son las dimensiones de cada una de las piezas que debe tener el marco? ________________
- Expliquen qué significado tiene $(2x + 6) = 60 + 132$ en el problema del marco y por qué la consideran diferente de la ecuación que plantearon ustedes. ________________

Observa

Si el término cuadrático tiene coeficiente uno, es más fácil factorizar el trinomio.

- Expresen $(2x + 10)(2x + 6) = 60 + 132$ en su forma general. ________________
- ¿La solución de la ecuación $(2x + 10)(2x + 6) = 60 + 132$ ayudaría a conocer las dimensiones del marco? Expliquen, en el cuaderno, su respuesta.

b) Se requiere elaborar las siguientes plantillas.La circunferencia debe medir lo mismo que el largo del rectángulo. Se debe usar, en cada plantilla, 4π m² de material. ¿Qué radio necesita tener cada círculo?



- Planteen una ecuación con la que se obtenga el radio y escríbanla en su forma general. ________________
- Simplifiquen la expresión anterior. ________________
- Encuentren las soluciones. ________ ¿Cuál debe ser el radio? ________

◆ **Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Compartan sus reflexiones sobre los diferentes procedimientos que utilizaron. Expliquen por qué es más sencillo factorizar si el coeficiente del término cuadrático es uno.**

Formalización. Para hallar la **solución** de una ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = d$$

donde x es un número desconocido y a, b, c, d, constantes; se expresa en su forma general y después se divide entre a. Observa el ejemplo.

La ecuación $4x^2 + 16x - 128 = 256$ en su forma general, queda $4x^2 + 16x - 384 = 0$.

Como el coeficiente del término cuadrático es 4, entonces se dividen ambos miembros de la igualdad entre 4 y se factoriza. Se obtiene $x^2 + 4x - 96 = 0$.

Si está escrita la ecuación en su forma general y el coeficiente del término cuadrático es 1, entonces se escribe el trinomio como un producto de binomios.

$$x^2 + 4x - 96 = (x - 8)(x + 12)$$

Entonces $(x - 8)(x + 12) = 0$ y las soluciones son $x = 8$ y $x = -12$

Actividad 5. Regresa al problema de la sección "Activo mis competencias", extrae los datos necesarios y responde. Haz las operaciones en tu cuaderno.

a) Para la cerca se utilizarán 280 m. Explica por qué la base del rectángulo mide $\frac{280 - 4x}{2}$. ______________________

____

b) Reduce la expresión $\frac{280 - 4x}{2}$. ______________________

c) Plantea una ecuación que represente el área del rectángulo. ______________

d) Escribe la ecuación anterior en la forma general. ______________

e) Encuentra una ecuación equivalente a la anterior en la cual el coeficiente del término cuadrático sea 1. ______________

f) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación anterior? ______________

g) Escribe las longitudes que debe tener el rectángulo.

- x = __________ y la base = __________
- x = __________ y la base = __________

Vinculación

Ciencias
En el curso de segundo grado, bloque 1 de Ciencias, estudiaste el tema de caída libre. Investiga las ecuaciones cuadráticas asociadas a este movimiento y encuentra una manera de factorizarlas. Describe un ejemplo en tu cuaderno.

Antes de iniciar la siguiente lección, investiga cuáles son las piezas del ajedrez y cómo es el movimiento de cada una.

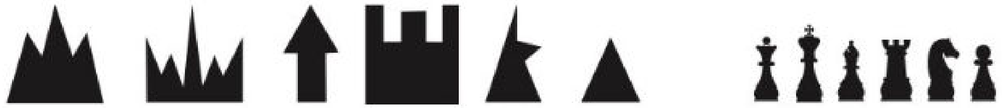
2.2 Transformaciones en el plano

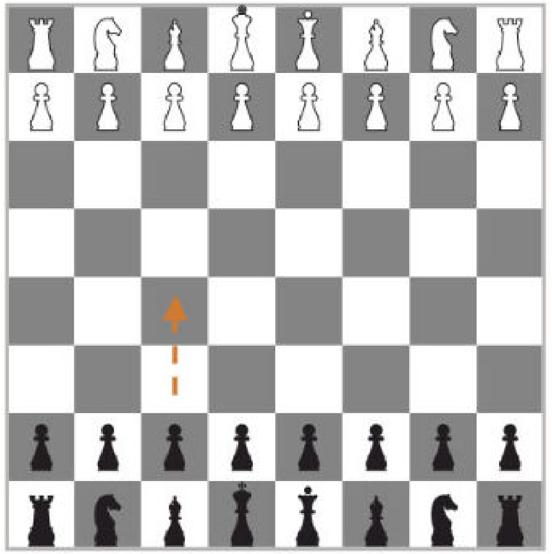
Analizo las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.

Activo mis competencias

Lee la información, sigue las instrucciones y responde.

El ajedrez es un juego que se lleva a cabo en un tablero cuadrado con 64 casillas en el que contienden dos participantes. Cada uno de ellos cuenta con 16 piezas que deben mover para capturar al rey del oponente. Hay seis tipos de piezas, y cada una se mueve de distinta forma. Al inicio de una partida se colocan las piezas como se muestra.





a) Marca los trazos que indiquen los movimientos de algunas piezas, observa el ejemplo.

b) Comenta con tus compañeros y profesor cómo son los movimientos de cada pieza: perpendiculares, paralelos, etcétera. Describe cómo se mueve el caballo. ______________

____

Cálculo mental

a) $\frac{3}{4}$ de 80° = ______
b) $\frac{1}{9}$ de 90° = ______
c) $\frac{1}{6}$ de 120° = ______
d) $\frac{2}{3}$ de 360° = ______
e) $\frac{3}{2}$ de 180° = ______

¿Sabías que...

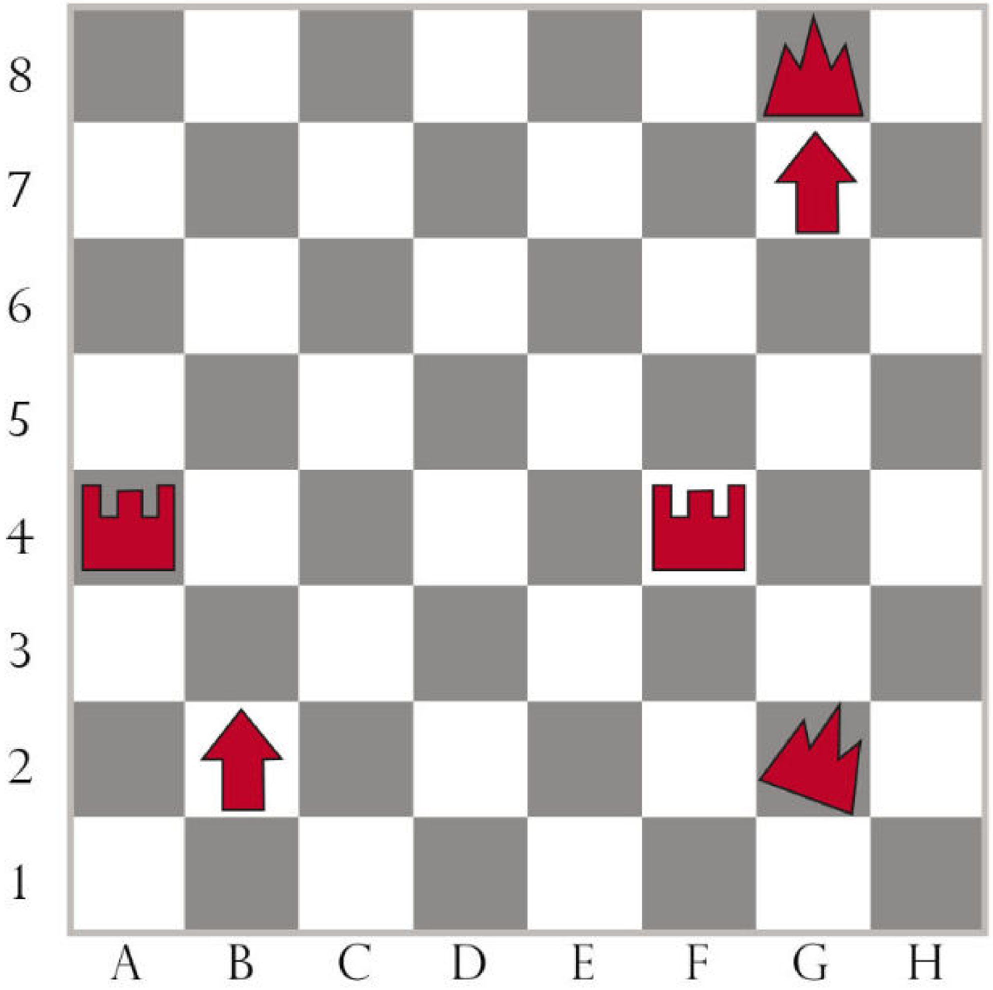
el origen del ajedrez fue un juego inventado en la India hace más de 2500 años llamado *Chaturanga*, es decir, "juego del ejercicio"? Se jugaba entre cuatro personas, pero con el paso de los siglos se fueron modificando las reglas y el tipo de piezas, hasta llegar al juego que hoy conocemos.

c) Calca varias veces al rey en una hoja blanca y recórtalos. En el tablero de abajo pega uno de ellos en la casilla B7 y el resto en cada opción donde puedan moverse. Cuida que sus bases estén sobre la base de la casilla y centradas.

- Une con una regla los vértices correspondientes del rey de la casilla de inicio con uno del final. ¿En cuántas posibles direcciones distintas se puede mover el rey?

d) Traza, en cada uno de los siguientes casos, las piezas en las casillas por las que pasan. Utiliza tu juego de geometría para que las figuras tengan la misma forma y tamaño que la original.

- La torre está en la casilla F4 y se mueve a la casilla A4.
- El alfil tiene que moverse de la casilla B2 a la casilla G7.



e) Une los vértices correspondientes de la torre original y de la final. ¿Cómo son, entre sí, las rectas que trazaste? ______________________

f) Une los vértices correspondientes del alfil original y del final. ¿Cómo son, entre sí, las rectas que trazaste? ______________________

g) Une los vértices correspondientes de la reina original G2 con la del final G8.

- ¿Cómo son los segmentos que unen vértices correspondientes?

____

- ¿Son congruentes las figuras que representan a las reinas en el tablero? Explica.

____

____

◆ **En los incisos c) y d), ¿las rectas pasan por los vértices correspondientes del resto de figuras que trazaste?, ¿las figuras cambiaron de tamaño?, ¿algunas figuras no quedaron alineadas? Comenta, en grupo, por qué sucede esto y analicen si en el inciso g) ocurre lo mismo que en c) y d). ¿Qué cambia en la figura de la casilla G2 del último inciso?**

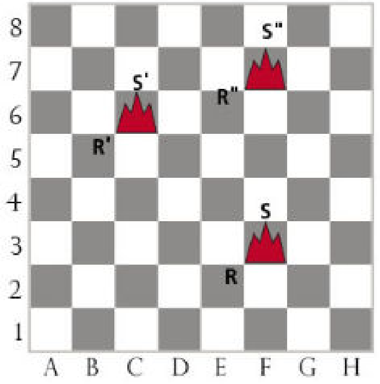
Consolido mis competencias

Actividad 6. Trabaja en parejas. Lean la información y respondan.

a) En el tablero, la reina tiene la opción de trasladarse desde la casilla F3 a la C6 o a la F7. ¿Cómo es el movimiento de la reina en cada caso? ¿Se mueve en línea recta en ambos casos? Argumenten su respuesta.

____

____



b) Tracen un segmento de recta que una los vértices correspondientes $\overline{RR'}$ y $\overline{SS'}$.

c) Anoten la medida de cada segmento. Hagan lo mismo, en su cuaderno, con el resto de los vértices correspondientes de estas dos figuras.

$\overline{RR'}$ ______________ $\overline{SS'}$ ______________

d) Subrayen la opción correcta y argumenten su respuesta en el cuaderno.

- Los lados correspondientes entre sí son

  perpendiculares. paralelos. ninguno de los dos.

- Los segmentos que unen vértices correspondientes son

  perpendiculares. paralelos. ninguno de los dos.

- Expliquen, en su cuaderno, si miden lo mismo los segmentos que unen las parejas de vértices correspondientes.

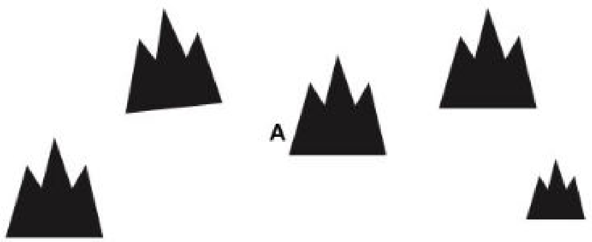
e) Procedan de la misma manera con las figuras de la reina de las casillas F3 y F7. Comparen sus resultados con los obtenidos en los incisos anteriores.

Formalización. Una **traslación** es el cambio de posición de una figura en el plano en que no cambia ni el tamaño ni la orientación de la figura.

Una figura es traslación de la otra cuando son congruentes y se cumple que sus lados correspondientes son paralelos, o bien, al prolongarlos, están sobre la misma recta. Además, los segmentos que se forman al unir vértices correspondientes tienen la misma medida y son paralelos entre sí.

Actividad 7. Trabaja en parejas. Elaboren las actividades y argumenten sus respuestas.

a) Encierren las figuras que son traslaciones de la figura A.



b) Argumenten, en cada caso, por qué es o no es traslación de la figura **A**.

____

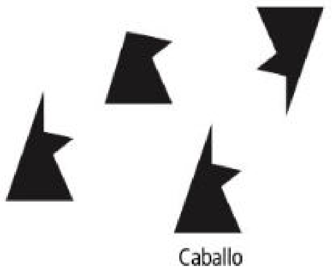
____

c) Encierren las figuras que no son traslaciones del caballo de ajedrez.

d) Argumenten por qué las figuras que eligieron no son traslaciones del caballo.

____

____



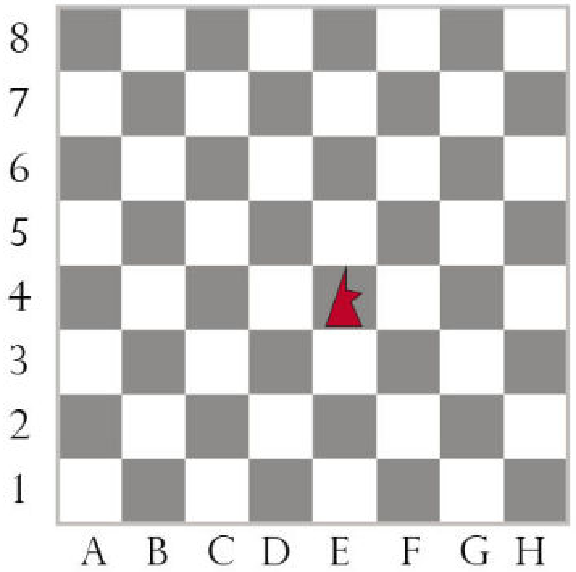
e) Comenten con otra pareja las estrategias que utilizaron para saber si una figura es traslación de otra. Propongan un ejemplo que ilustre la argumentación de su respuesta.

f) Dibujen, en el siguiente tablero, un caballo en cada casilla donde podría llegar el caballo rojo de un solo movimiento. Argumenten si cada movimiento del caballo es una traslación.

____

____

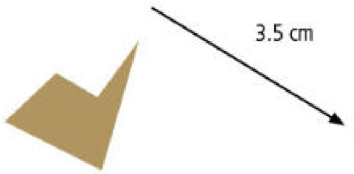
____



Consolido mis competencias

Actividad 8. Lee las instrucciones y traza la figura.

a) Traslada la figura en la dirección que marca la flecha y con la distancia indicada.



Entra a www.redir.mx/matfort3-084
Este recurso te permitirá manipular, de manera visual, los conceptos de traslación y rotación Efectúa lo que se te pide y posteriormente define, con tus palabras, en qué consiste una transformación en el plano.

TIC

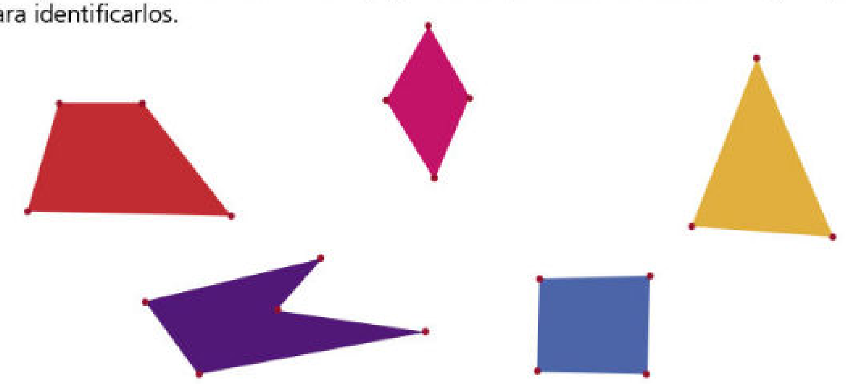
b) Haz una traslación de la figura en la dirección que marca la flecha y con la distancia indicada.

c) Haz una traslación de la figura, de tal forma que el vértice **A'** sea el correspondiente del vértice **A**.

Consolido mis competencias

Actividad 9. Trabaja en parejas; calquen en una hoja blanca las figuras y recórtenlas. Escriban sus observaciones en su cuaderno.

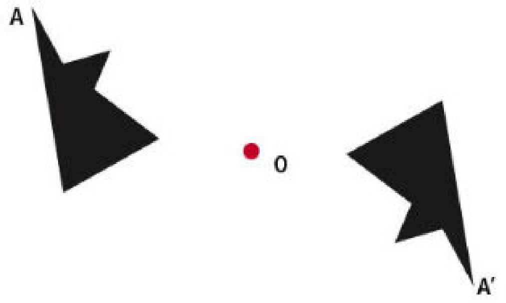
a) Coloquen sus recortes sobre una hoja y escriban, en cada vértice de las figuras, una letra para identificarlos.



- Elijan una figura, claven un alfiler o la punta del lápiz en uno de sus vértices y gírenla. Analicen cuántos grados deberán girarla para que vuelva a quedar en la misma posición.
- En otra figura, claven el alfiler en algún punto interior de la misma y gírenla. ¿Cuántos grados deberán girarla para que los vértices vuelvan a quedar en la misma posición? ¿Notan algún cambio cuando clavan el alfiler en un vértice o en el interior de la figura?

b) Analicen la imagen y respondan.

- Describan cómo deben mover el caballo para llevarlo de la posición **A** a la **A'**.
- Propongan una manera en la que claven el alfiler fuera de la figura y puedan verificar su descripción anterior.

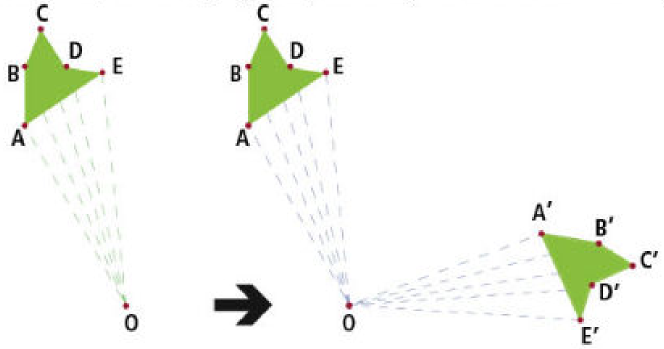


◆ Comparen sus observaciones con las de otros compañeros. Expliquen qué función tiene el alfiler cuando se gira la figura. ¿Influye el hecho de que se clave en un vértice, en el centro o fuera de ésta?

Consolido mis competencias

Actividad 10. Analiza la figura y completa las instrucciones para rotar una figura respecto a un punto fuera de ésta y un ángulo cualesquiera.

a) Sigue la construcción, utiliza regla y compás. Completa las instrucciones que hacen falta.



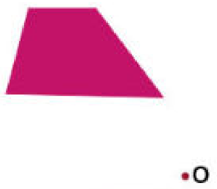
1. Se unen, mediante una línea recta, los vértices de la figura con el centro de rotación **O**.
2. ____

____

____

3. Sobre el lado del ángulo trazado se coloca un punto **A'** a la misma distancia de **O** que el punto correspondiente **A**. Lo mismo para el resto de los puntos.
4. Finalmente ____

b) Haz una rotación de la figura con respecto al punto **O**, que tenga un ángulo de rotación de 60°. Traza la nueva figura en la posición correspondiente.



Formalización. Una **rotación** es un cambio de posición de una figura en el plano, la cual gira en torno a un punto fijo. No cambia el tamaño, pero sí la orientación.

Cuando se rota una figura, respecto a un punto de rotación y un ángulo dado, cada uno de los puntos de ésta gira sobre una circunferencia que tiene como centro un punto fijo llamado **centro de rotación** y con un ángulo dado al que se nombra **ángulo de giro**.

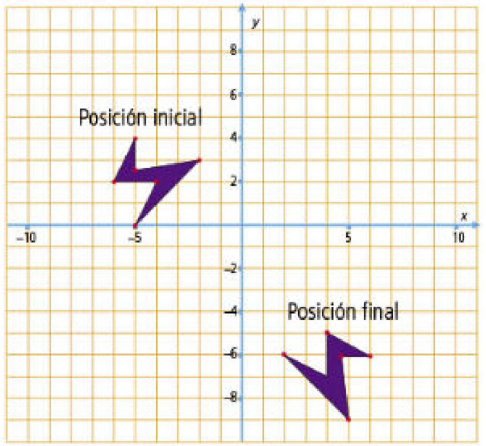
2.3 Figuras simétricas

Construyo diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

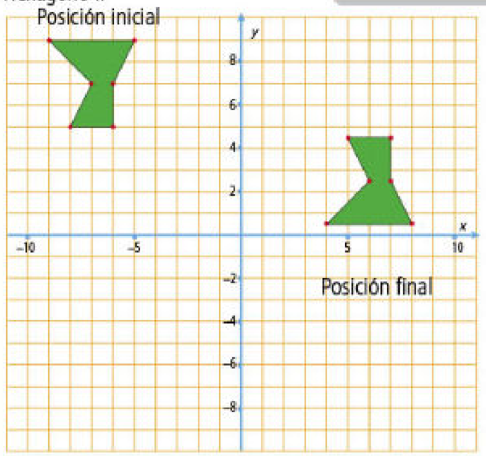
Activo mis competencias

Analiza los hexágonos I y II. Explica qué tipo de transformaciones se les aplicó al momento de cambiarlos de posición. Argumenta tu respuesta en cada caso.

Hexágono I



Hexágono II



a) Hexágono I ____

____

____

____

b) Hexágono II ____

____

____

____

◆ Expón tus argumentos ante el grupo con la finalidad de que se familiaricen con los términos *traslación*, *rotación*, *simetría*.

Cálculo mental

a) 30° + ________ = 180°
b) 70° − ________ = 10°
c) 270° + ________ = 100°
d) 30° (________) = 270°

Consolido mis competencias

Actividad 11. Trabaja en pareja. Lean la transformación hecha por cada alumna para llevar el hexágono I a su posición final, como en la sección "Activo mis competencias".

- Xóchitl hizo una rotación.
- Imelda efectuó una traslación seguida de una rotación con centro en el origen.
- Rosaura aplicó una rotación, con centro en el origen, seguida de una traslación.

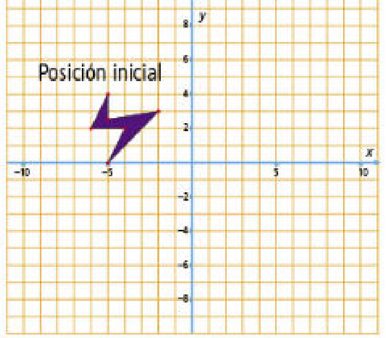
a) ¿Quién tiene razón? ______________ Expliquen. ______________________

____

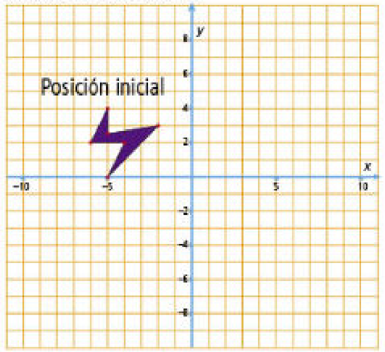
____

b) Tracen, paso a paso, una de las transformaciones que eligieron como correcta y una diferente de la de las tres alumnas, para llevar el hexágono I a su posición final.

Transformación que eligieron



Transformación alterna

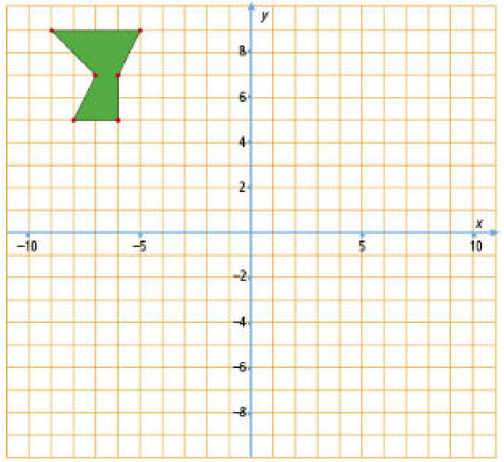


c) Elijan la transformación que se le aplicó al hexágono II para llevarlo a su posición final.

- Una traslación seguida de una simetría respecto al eje x
- Una simetría central respecto al origen seguida de una traslación
- Una simetría respecto al eje y seguida de una traslación
- Una simetría respecto al lado menor del hexágono II seguida de una traslación
- Una simetría respecto al lado mayor del hexágono II seguida de una traslación

◆ **Comparen sus resultados con los de otra pareja. Comenten aquellos aspectos en los que no estén de acuerdo, y argumenten por qué desecharon algunos procedimientos.**

d) Elijan la transformación que consideren correcta y trácenla paso a paso.



TIC Visita el sitio www.redir.mx/matfort3-089 y construye mosaicos aplicando diferentes transformaciones geométricas. Haz uno de colores en una cartulina, y explica ante el grupo qué transformaciones utilizaste.

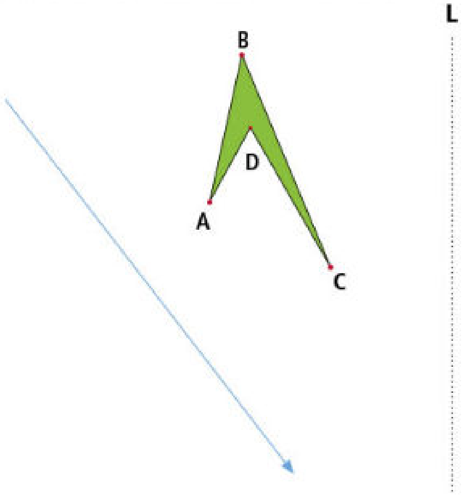
◆ **Comparen sus transformaciones de los incisos b) y e) con las del grupo para conocer las diferentes maneras propuestas con el fin de llegar de una posición a otra.**

Actividad 12. Reúnete en parejas. Calquen la figura y la recta en una hoja blanca. Apliquen las transformaciones al cuadrilátero ABCD.

a) Antes de hacer los trazos comenten si consideran que obtendrán los mismos resultados. Argumenten sus respuestas.

Alumno 1. Traslada 5 cm el cuadrilátero **ABCD** en la misma dirección que indica la flecha. Traza el simétrico del cuadrilátero resultante respecto a la recta **L**.

Alumno 2. Traza el simétrico del cuadrilátero **ABCD** respecto a la recta L. Traslada 5 cm sólo el cuadrilátero resultante en la dirección que indica la flecha.



b) ¿Obtuvieron el mismo resultado? ________________ Expliquen por qué sucede esto.

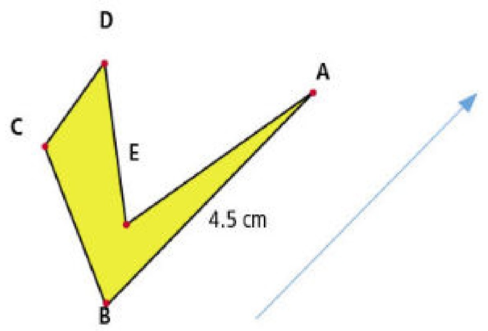
____

____

____

- Expliquen, en su cuaderno, en qué dirección se debe trasladar el cuadrilátero **ABCD** resultante del procedimiento del alumno 2, para obtener el mismo resultado que el del alumno 1.
- Si se traza una flecha que indique esta nueva dirección, ¿cómo debe ser el ángulo que se forma respecto a la flecha del dibujo original? Comenten sus observaciones.

Actividad 13. Reúnete en parejas. Calquen la figura y la recta en una hoja blanca. Apliquen las transformaciones al pentágono **ABCDE**. Antes de hacer los trazos comenten si obtendrán el mismo resultado.



Alumno 1. Rota 180° el pentágono **ABCDE** con centro en **B**, y después rota 180° los pentágonos (el original y el resultante de la rotación anterior) ahora con centro en **A**.

Alumno 2. Traza una rotación de 180° del pentágono **ABCDE** con centro en **B**. Traslada ambos pentágonos (el original y el resultante de la simetría anterior) 4.5 cm en la dirección que indica la flecha.

- ¿Obtuvieron el mismo resultado? ____________ Expliquen por qué sucedió esto.

____

____

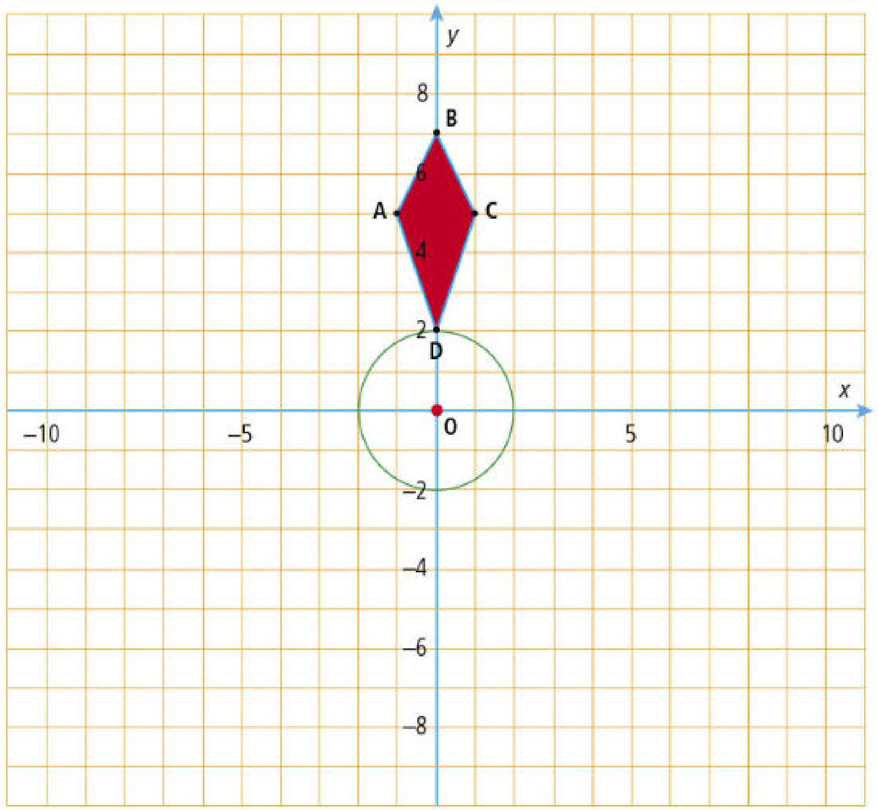
____

Consolido mis competencias

Actividad 14. Lee la información y responde.

a) Lleva a cabo las siguientes transformaciones del cuadrilátero **ABCD**.

- Una rotación de 30° del polígono **ABCD**, con centro en **O**
- Una rotación de 60° del polígono **ABCD**, con centro en **O**
- Una rotación de 90° del polígono **ABCD**, con centro en **O**
- Refleja la figura que quede (cuatro cuadriláteros) respecto al eje *y*
- Refleja todos los cuadriláteros respecto al eje *x*



b) ¿Hay otra manera de obtener el mismo diseño a partir de transformar el cuadrilátero **ABCD**? Explícala. ______________________________

- Compara tu propuesta con la de otros compañeros. ¿Qué transformaciones utilizaron?

Formalización. Una figura es una **traslación** de otra si los segmentos que unen los puntos correspondientes de ambas figuras tienen la misma medida y son paralelos entre sí. A la medida del segmento se le llama *medida de la traslación*.

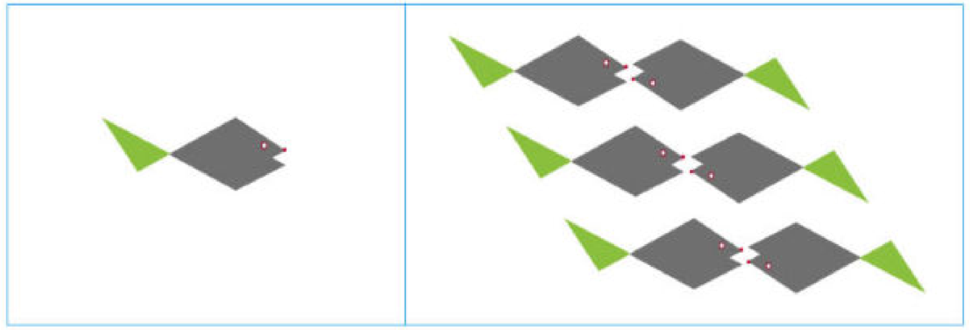
Para hacer la **rotación** de una figura se requiere un ángulo y un centro de rotación. El centro de rotación puede estar en alguno de los vértices, sobre alguno de sus lados, dentro o fuera de la figura.

Una **simetría central** es una rotación de 180° y cuyo centro de rotación se llama *centro de simetría*.

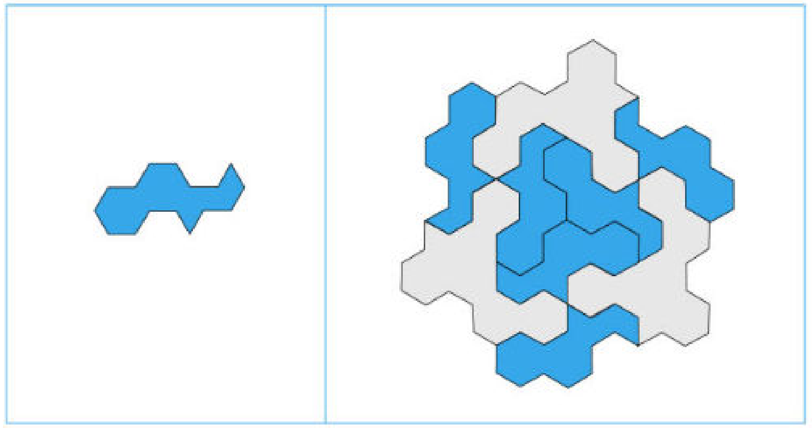
- Reúnete con un compañero y hagan los trazos necesarios para mostrar que al reflejar una figura dos veces respecto a dos rectas perpendiculares se obtiene una rotación de 180°. Comparen sus trazos con los de otros compañeros.

Actividad 15. Describe, en tu cuaderno, paso a paso, qué transformaciones debes aplicar a la figura de la izquierda para obtener la de la derecha.

a)



b)



Nota histórica

Investiga qué son las *carretillas de Penrose* y cómo están formadas. Elabora una breve reseña sobre este matemático.

- Comenta con un compañero otra manera de llegar al mismo resultado al aplicar otras transformaciones.

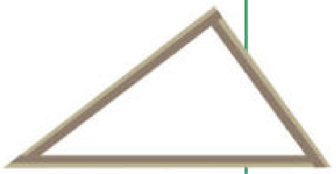
2.4 La medida de los lados de un triángulo

Analizo las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Activo mis competencias

Lee la información y responde.

Un albañil coloca losetas de diferentes formas y tamaños. Para pegar las piezas y cortar ángulos rectos utiliza una escuadra, pero no la trae consigo, así que construye una de la siguiente manera: toma como unidad de medida la longitud de su mano y corta tres tramos de madera, uno de 3 unidades (u), otro de 4 u y el último de 5 u; al sujetarlos con tornillos por los extremos obtiene una escuadra perfecta.



a) ¿Cómo compruebas que la escuadra que construyó efectivamente le permite medir ángulos rectos? __________

b) Traza los triángulos con las medidas que se indican y escribe si se trata de un obtusángulo, acutángulo o rectángulo. Elige una unidad adecuada.

(3, 4, 5)	(3, 4, 6)	(3, 4, 4)

c) ¿Obtendrías una escuadra con las medidas de (4, 4, 4) unidades? __________

d) ¿Y si emplearas las medidas (6, 8, 10) unidades? __________

Cálculo mental

a) $3^2 + 5^2 =$ ________

b) $2^3 + 3^3 =$ ________

c) $7^2 + 6^2 =$ ________

d) $8^2 + 4^2 =$ ________

e) $9^2 + 10^2 =$ ________

e) ¿Cómo son entre sí los triángulos con las medidas (3, 4, 5) y (6, 8, 10) unidades? Justifica.

f) Comprueba si con el triángulo cuyas medidas son (9, 12, 15) unidades puedes trazar ángulos de 90°. Explica.

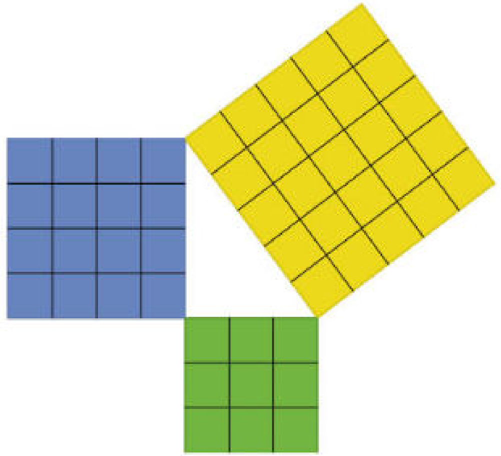
◆ **Comenta con tus compañeros qué criterio utilizaste para comprobar si un triángulo tiene ángulos rectos o no los tiene.**

Consolido mis competencias

Actividad 16. **Lee la información y responde.**

Recuerda

Los lados cortos de un triángulo rectángulo se llaman *catetos*, y la *hipotenusa* es el lado más largo.



a) ¿Cuánto tiene de área cada cuadrado?

b) ¿Hay alguna relación entre las áreas de los cuadrados más chicos y la del cuadrado más grande?

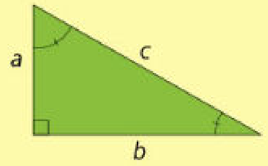
c) Haz los trazos para los triángulos del inciso b) de la sección "Activo mis competencias". Comenta con otro compañero si hallaste alguna relación entre las áreas de los lados.

d) Completa la siguiente tabla. Traza, en tu cuaderno, los triángulos con los cuadrados correspondientes en cada lado. Utiliza una unidad de medida que consideres adecuada.

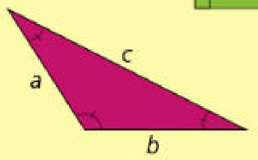
Medida de los lados (u)	Área del cuadrado del lado más chico (u^2)	Área del cuadrado del lado mediano (u^2)	Suma de las áreas de los cuadrados anteriores (u^2)	Área del cuadrado del lado más grande (u^2)	Es acutángulo, obtusángulo o rectángulo
(3, 4, 5)	9	16	25	25	
(6, 8, 10)					
(5, 12, 13)					
(5, 12, 14)					
(9, 12, 15)					
(8, 15, 17)					
(12, 16, 20)					
(12, 16, 19)					

▪ Usa tu escuadra o tu transportador para comprobar si se forma algún ángulo recto.

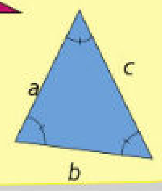
Formalización. Si en un triángulo la suma de los cuadrados de los lados más chicos es igual al cuadrado del lado más grande, entonces el triángulo es rectángulo. A esto se le llama **recíproco del teorema de Pitágoras**. $a^2 + b^2 = c^2$



Por el contrario, si la suma de los cuadrados de los lados más chicos es menor que el cuadrado del lado más largo, entonces el triángulo es obtusángulo. $a^2 + b^2 < c^2$



Por último, si la suma de los cuadrados de los lados más chicos es mayor que el cuadrado del lado restante, entonces el triángulo es acutángulo. $a^2 + b^2 > c^2$



◆ **Reúnete con un compañero y analicen la información anterior. ¿Cómo responderían ahora las actividades de la sección "Activo mis competencias"?**

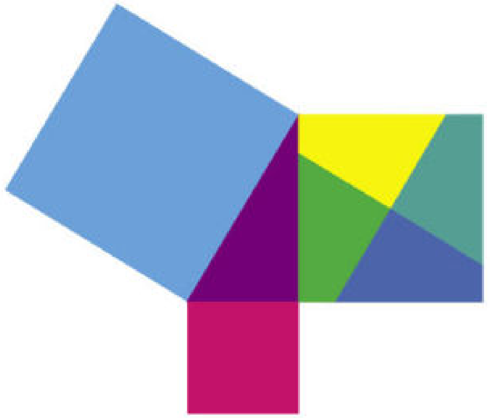
Consolido mis competencias

Actividad 17. Calca la imagen en una hoja, recorta las piezas y responde.

a) Intenta cubrir el área del cuadrado más grande con el cuadrado pequeño y las cuatro piezas del mediano.

Visita www.redir.mx/matfort3-096 y resuelve las actividades sobre la relación entre los catetos de un triángulo rectángulo y su hipotenusa.

TIC



b) ¿Cuál es la razón de que esto suceda? Reúnete con un compañero, discutan y lleguen a una conclusión. ______________________

____

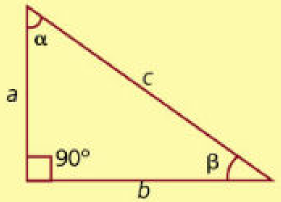
c) Si recortaras alguno de los catetos del triángulo, ¿sucedería lo mismo? Responde y explícalo en tu cuaderno.

◆ **Comenta con un compañero si ocurre lo mismo para un triángulo obtusángulo. Lean la información y lleven a cabo lo que se indica.**

Formalización. Si un triángulo es rectángulo, entonces se cumple lo siguiente:

la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. $a^2 + b^2 = c^2$

A esto se le llama **teorema de Pitágoras**.



■ Utilicen el resultado anterior y comprueben qué triángulos de la tabla de la actividad 16, inciso d), son rectángulos.

◆ **Observen qué valores obtuvieron para el caso de los triángulos obtusángulos y para los acutángulos. ¿Se cumplen las afirmaciones del recuadro final de la página anterior?**

2.5 Teorema de Pitágoras

Explicito y uso el teorema de Pitágoras.

Activo mis competencias

Lee la información y responde.

Un ingeniero hidráulico revisa las tuberías de una ciudad. En uno de los planos encuentra que el codo que alimenta al acueducto se encuentra 300 m al norte y a 400 m al este de donde él se ubica.

Cálculo mental

a) $20^2 + 30^2 =$ ______

b) $60^2 + 80^2 =$ ______

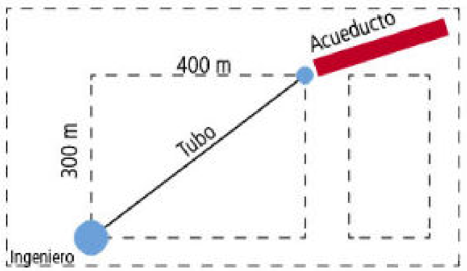
c) $100^2 + 200^2 =$ ______

d) $100^3 + 100^3 =$ ______

a) El tubo está en línea recta desde su ubicación, ¿qué distancia recorre horizontalmente?

____

____



En el lugar donde se encuentra el ingeniero, el tubo tiene una profundidad de 10 m, pero al llegar al acueducto se encuentra a nivel del piso.

b) Dibuja un diagrama de esta situación en tu cuaderno. ¿Qué método usarías para calcular la longitud del tubo? Descríbelo. ______________________

____

____

____

c) ¿Cuál es la longitud del tubo? ______________________

d) Otro tubo, cuyo largo es de 1 300 m, atraviesa en diagonal una manzana de 1 200 m de largo, de la colonia Centro, la cual tiene forma rectangular.¿Cuánto mide de ancho?

____

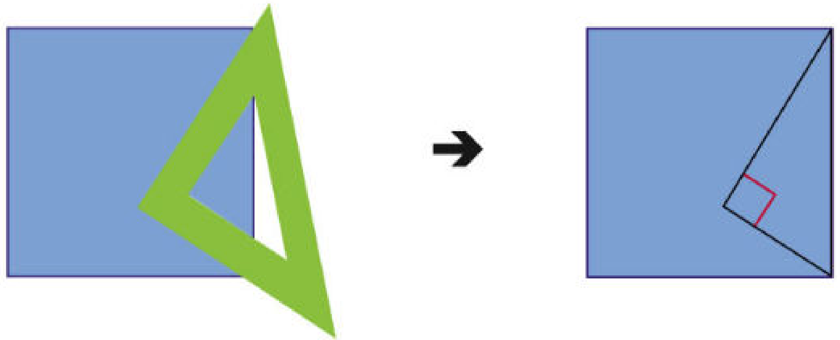
◆ **Compara tu procedimiento con el de un compañero. Revisen las diferencias y corrijan los posibles errores.**

Consolido mis competencias

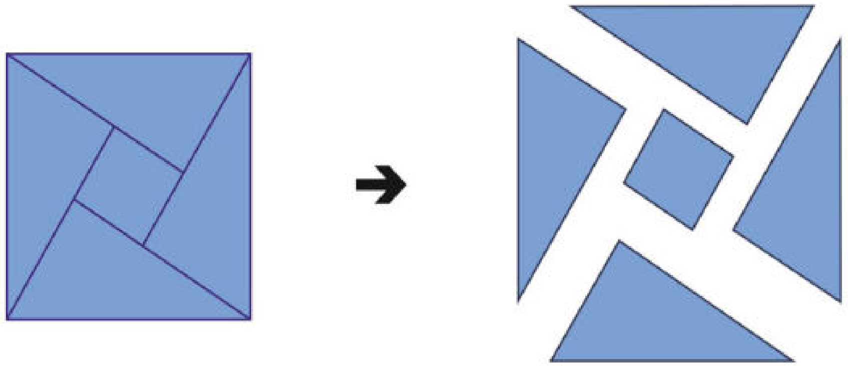
Actividad 18. **Lee la información y lleva a cabo la actividad.**

a) Traza, en tu cuaderno, un cuadrado de 20 cm de lado.

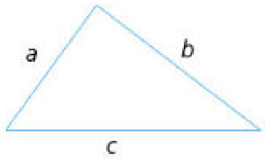
b) Traza dos segmentos con un lápiz y una escuadra como se muestra a continuación, pueden tener medidas arbitrarias, pero el ángulo formado entre ambos debe ser recto. Éste será el triángulo con el que examinaremos el teorema de Pitágoras.



c) Repite el triángulo como se muestra y recorta cada figura del cuadrado. Cuida que los ángulos coincidan con el original.

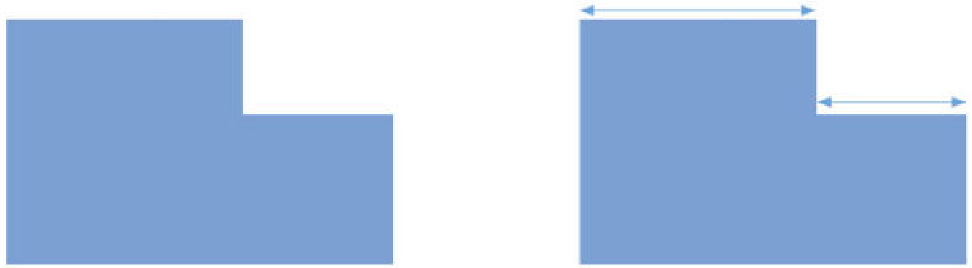


d) Observa las medidas del triángulo original y completa.



- Escribe la expresión algebraica que permite calcular el área del cuadrado original. ____________
- Comenta con un compañero lo siguiente: ¿la suma de las áreas de las piezas deberá ser igual al área del cuadrado completo? Si modifican las medidas del triángulo, ¿qué condiciones deben tener en cuenta para que esto se cumpla?

e) Reacomoda cada pieza y construye la figura de abajo. Traza la línea que separa la figura en dos cuadrados y calcula el área de cada uno.



Área del cuadrado grande: ____________ Área del cuadrado chico: ____________

f) ¿La medida de los lados de los cuadrados coincide con alguna de las medidas del triángulo?

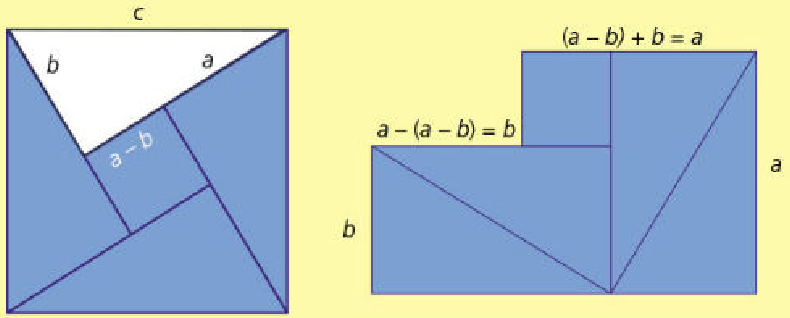
____

g) Haz los cálculos correspondientes al cuadrado que trazaste en tu cuaderno. ¿Se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$? ____________

h) Escribe, en tu cuaderno, una conclusión sobre lo que se acaba de mostrar geométricamente.

◆ **Comenta con tus compañeros la justificación geométrica considerando lo que hicieron en la lección anterior. ¿Qué entienden por *recíproco del teorema de Pitágoras*?**

Formalización. La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa. Esto se llama **teorema de Pitágoras** y se justifica al observar la recomposición de las siguientes figuras.

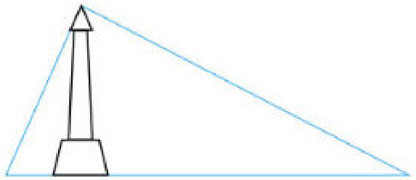


Consolido mis competencias

Actividad 19. Resuelve los siguientes problemas en pareja.

a) Una antena de telecomunicaciones está sujeta al suelo por dos cables de 27 m y 36 m de longitud que forman un ángulo recto entre ellos.

¿A qué distancia, sobre el piso, se encuentran las sujeciones mencionadas?



b) Los lados de un triángulo equilátero miden 8 cm, ¿cómo calcularías su altura? Trázalo en el espacio y explica tu procedimiento.

Nota histórica

Los babilonios conocían la relación que existe entre los cuadrados de los lados de un rectángulo y el cuadrado de su diagonal. Investiga qué tercias de números conocían y la fecha aproximada de su descubrimiento.

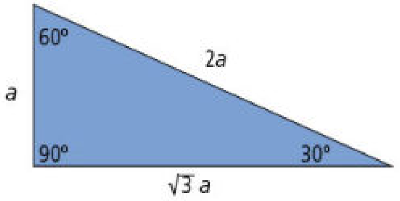
- Calcula la altura del triángulo. ______

◆ Comenta con un compañero lo siguiente y resuelvan. ¿Cuánto miden los ángulos de los dos triángulos que se obtienen al dividir el triángulo equilátero?

Consolido mis competencias

Actividad 20. Lee la siguiente conjetura y resuelve los ejercicios.

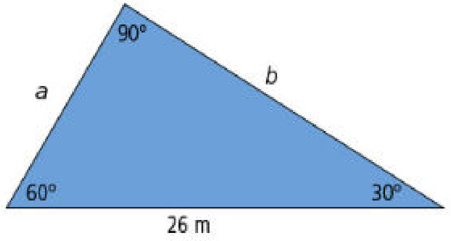
a) Conjetura del triángulo 30°, 60°, 90°. En un triángulo con ángulos de 30°, 60° y 90°, si el cateto más corto tiene una longitud a, entonces el cateto más largo tiene una longitud de $\sqrt{3}a$ y la hipotenusa tiene una longitud de $2a$.

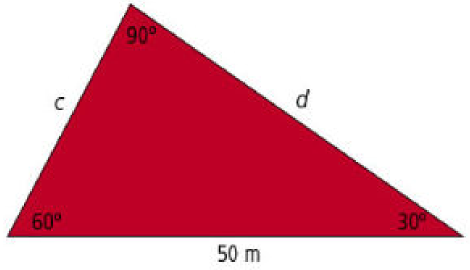


TIC En www.redir.mx/matfort3-101 encontrarás otra forma de verificar el teorema de Pitágoras. Contesta el cuestionario que aparece al final.

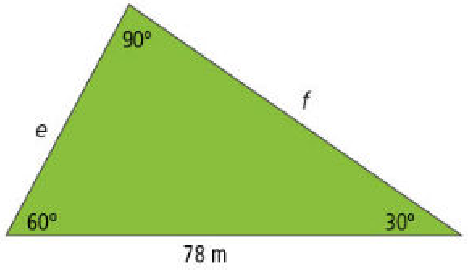
b) Efectúa las operaciones necesarias para comprobar que este triángulo cumple con el teorema de Pitágoras. ______

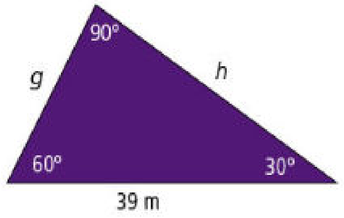
c) Encuentra las longitudes de los lados que se indican con una letra.





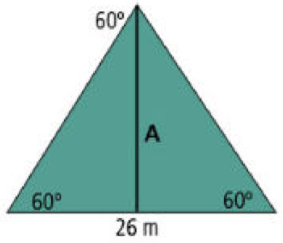
a: ______ b: ______ c: ______ d: ______

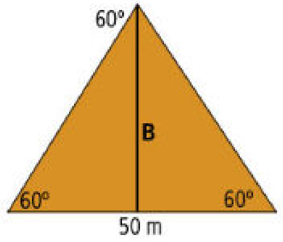


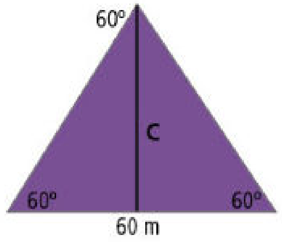


e: ______ f: ______ g: ______ h: ______

d) Calcula las longitudes de los lados que se indican.







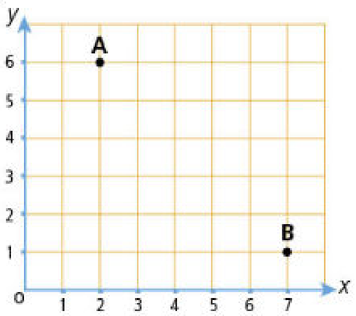
A: ______ B: ______ C: ______

◆ **Reúnete en pareja, comparen sus resultados, revisen los posibles errores y corríjanlos. Investiguen qué significa la palabra *conjetura*.**

Actividad 21. Resuelve.

a) Se tienen dos puntos **A** y **B** en un diagrama cartesiano.

- Encuentra la distancia del punto **A** al **B**.
- Halla la segunda coordenada del punto **C** (8, ___) sabiendo que se encuentra a 10 unidades de distancia del punto **D**(2, 0).



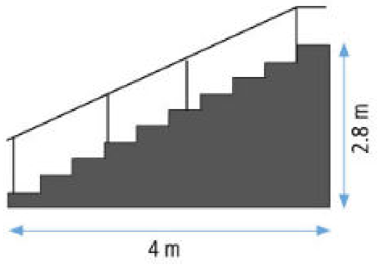
b) Una escalera debe cubrir un desnivel de 2.8 m, y una distancia horizontal de 4 m. Todos los escalones deben ser iguales; por tanto, su alto y ancho serán proporcionales a las medidas de alto y ancho total de la escalera.

¿Qué medida tendrán los escalones si se hacen 18?

______

______

¿Y si se construyen 14? ______



◆ **Expón, en grupo, los procedimientos que utilizaron para resolver los problemas. Corrijan sus posibles errores y despejen sus dudas.**

2.6 La regla de la suma

Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

Cálculo mental

a) $\frac{1}{2}$ de 175 = ______

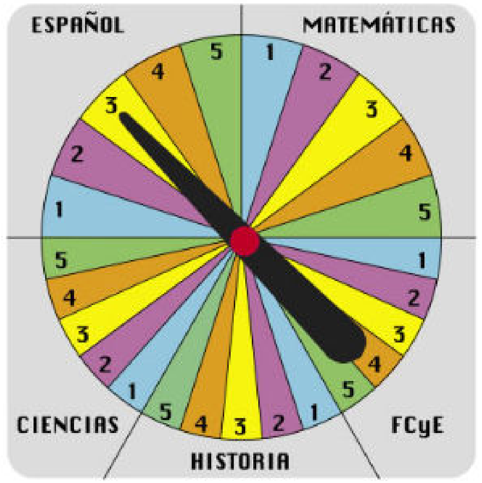
b) $\frac{2}{3}$ de 60 = ______

c) $\frac{1}{5}$ de 14 = ______

d) $\frac{3}{10}$ de 110 = ______

Activo mis competencias

Trabaja con un compañero. En una secundaria elaboraron el siguiente tablero para analizar los temas que estudiaron en segundo grado. El juego consiste en girar una flecha sobre una ruleta para que, de forma alternada, cada participante responda una pregunta que corresponda a la asignatura y el bloque indicados.



Al girar la flecha sobre la ruleta, ¿cuál es la probabilidad de que el jugador en turno deba responder una pregunta

a) de Español? ______

b) del bloque 1? ______

c) del bloque 1 de Historia o de Ciencias? ______

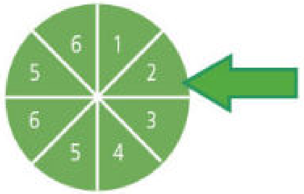
d) de Español o de Matemáticas? ______

e) del bloque 3 o de Formación Cívica y Ética? ______

◆ **Reúnete en parejas, comparen la forma en que calcularon la probabilidad de cada evento y justifiquen sus procedimientos en el cuaderno. Argumenten ante el grupo los diferentes métodos para calcular cada probabilidad, comenten las diferencias y decidan cuál es el procedimiento más eficiente.**

Consolido mis competencias

Actividad 22. Trabaja con un compañero. Respondan las preguntas respecto a la ruleta.



a) ¿Cuál es el espacio muestral en el experimento aleatorio de girar una vez la ruleta? ______

b) Al girar la ruleta, para que la flecha verde señale una de las opciones, ¿qué probabilidad de ser seleccionado le corresponde a cada uno de los números? ______

c) Indiquen la probabilidad de cada evento.

- Evento **A**: "obtener un número par" ______
- Evento **B**: "obtener un número mayor o igual a 5" ______
- ¿Los eventos **A** y **B** son mutuamente excluyentes entre sí? Justifiquen su respuesta. ______

d) Escriban dos eventos que sean complementarios entre sí.

Evento **C**: ______

Evento **D**: ______

- Indiquen la probabilidad de cada uno. P(**C**) = ______ P(**D**) = ______
- Indiquen la probabilidad de que ocurra alguno de los eventos **C** o **D**. ______

e) Escriban dos eventos que sean mutuamente excluyentes entre sí.

Evento **E**: ______

Evento **F**: ______

- Indiquen la probabilidad de cada uno. P(**E**) = ______ P(**F**) = ______
- Determinen la probabilidad de que ocurra alguno de los eventos **E** o **F**. ______

f) Expliquen cómo determinaron las probabilidades de los incisos d) y e). ______

Actividad 23. Trabaja con un compañero. Lean las reglas del juego de la perinola y hagan lo que se indica.

- A cada jugador se le reparten cinco fichas.
- Todos los jugadores colocan una ficha.
- En forma alternada, cada jugador gira la perinola.
- Cada turno ejecuta la orden que indica la cara superior de la perinola. Las posibilidades son toma todo, todos ponen, toma 1, toma 2, pon 1 y pon 2.
- Si un jugador obtiene "toma todo" se lleva las fichas acumuladas y los demás jugadores colocan nuevamente una ficha. Si sale "todos ponen", cada jugador entrega una ficha.
- Si un jugador se queda sin fichas, sale del juego.

a) Determinen la probabilidad de cada evento, al girar una perinola en un solo turno.

- Evento **A**: "todos los participantes ponen una ficha". ______
- Evento **B**: "el jugador en turno se queda con todas las apuestas". ______
- Evento **C**: "el jugador en turno pone alguna ficha". ______
- Evento **D**: "el jugador en turno gana al menos una ficha". ______
- Evento **E**: "el jugador en turno gana al menos una ficha o pone al menos una ficha". ______

b) Respondan lo que se pide sobre los eventos anteriores.

- Identifiquen dos eventos complementarios. Indiquen la probabilidad de que ocurra alguno de los dos. ______
- Identifiquen dos eventos mutuamente excluyentes. Indiquen la probabilidad de que ocurra alguno de los dos. ______

◆ Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Externen sus dudas y las dificultades que tuvieron con la finalidad de resolverlas. Lean y discutan la información.

Formalización. Para los eventos **A** y **B** en un experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurra uno de los dos, o los dos, se indica como P(**A** o **B**), y se lee "la probabilidad de que ocurra **A** o **B**".

Cuando dos eventos son mutuamente excluyentes entre sí (o son complementarios) la probabilidad P(**A** o **B**) se calcula con la **regla de la suma**.

$$P(\mathbf{A} \text{ o } \mathbf{B}) = P(\mathbf{A}) + P(\mathbf{B})$$

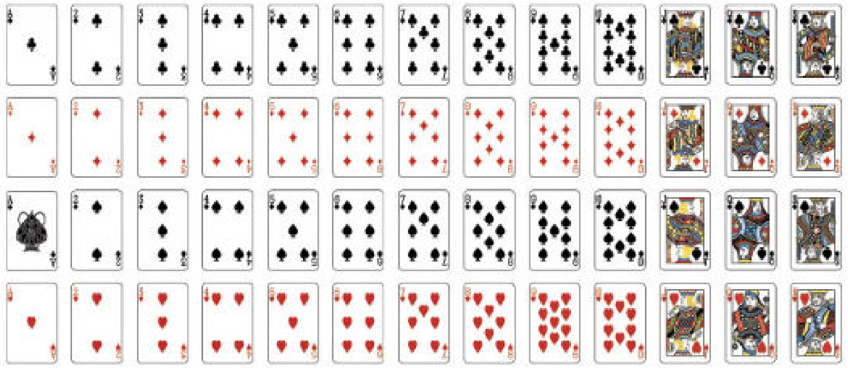
Si los dos eventos son complementarios, la probabilidad de que ocurra uno u otro es igual a uno; por lo tanto, es un evento seguro. Es decir

$$P(\mathbf{A} \text{ o } \mathbf{A}^C) = P(\mathbf{A}) + P(\mathbf{A}^C) = 1.$$

De aquí se concluye que la probabilidad de un evento complementario a un evento **A** se calcula como 1 menos la probabilidad de **A**.

$$P(\mathbf{A}^C) = 1 - P(\mathbf{A})$$

Actividad 24. Analiza todas las cartas que componen una baraja inglesa. Con ésta, se lleva a cabo el experimento aleatorio de extraer una carta del mazo. Haz lo que se indica.



a) Determina la probabilidad de cada evento.

- Evento **A**: "se extrae una carta de corazones rojos" __________
- Evento **B**: "se extrae una carta de diamantes" __________
- Tacha con color azul todas las cartas que cumplan el evento **A** y con rojo todas las que cumplan el evento **B**.

- ¿Cuál es el valor de P(**A** o **B**)? __________
- Justifica tu respuesta. __________

b) Determina la probabilidad de cada evento.

- Evento **C**: "se extrae un as" __________
- Evento **D**: "se extrae una carta de tréboles" __________
- Tacha con color verde todas las cartas que cumplan el evento **C** y con negro las que cumplan el evento **D**.
- ¿Qué concluyes respecto a lo que sucedió con la carta as de trébol? __________
- ¿Cuál es el valor de P(**C** o **D**)? __________
- Justifica tu respuesta. __________

Vinculación

Ciencias
¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un elemento al azar de la tabla periódica sea un metal? Indica si, para responder, tuviste que usar las reglas de la suma.

c) Determina la probabilidad de cada evento.

- Evento **E**: "se extrae una carta de diamantes o corazones" __________
- Evento **F**: "se extrae una carta con una figura **J**, **Q** o **K**" __________
- ¿Cuál es el valor de P(**E** o **F**)? __________
- Justifica tu respuesta. __________

d) Trabaja con dos o tres compañeros. Contrasten la manera en que calcularon P(**A** o **B**) con P(**C** o **D**). Escriban sus conclusiones. __________

Consolido mis competencias

Actividad 25. Lleva a cabo lo que se indica. El experimento aleatorio consiste en colocar una canica en la ruleta, girarla y ver en qué número cae. Responde y justifica en tu cuaderno.

TIC Explora www.redir.mx/matfort3-108, selecciona el menú "Equipamiento experimental", elige tres experimentos y efectúa lo que se indica. Escribe tus conclusiones en el cuaderno y discute tus procedimientos con tus compañeros.

a) Escribe los elementos que conforman el espacio muestral.

b) Escribe un ejemplo de **evento simple**, sus resultados favorables y la probabilidad de que ocurra.

c) Analiza los eventos que se presentan en el tapete junto a la ruleta. Con base en ellos escribe cinco ejemplos de **eventos compuestos**, pon en una lista sus resultados favorables e indica la probabilidad de que ocurran.

d) Anota un ejemplo de eventos complementarios.

e) Indica la probabilidad de que ocurra alguno de los dos.

f) Escribe un ejemplo de eventos mutuamente excluyentes.

g) Muestra la probabilidad de que suceda alguno de los dos.

h) Anota un ejemplo de eventos que no sean mutuamente excluyentes.

i) Indica la probabilidad de que ocurra alguno de los dos.

- Compara tus respuestas de las actividades 24 y 25 con las de tus compañeros. Valoren las conclusiones que escribieron y si los eventos propuestos cumplen con las características aprendidas durante el transcurso de esta lección y la lección 1.6.
- Discutan, en grupo, si participarían en un juego de azar como la lotería o la ruleta. Expliciten sus motivos y argumenten considerando lo estudiado en esta secuencia.

¿Qué tanto sé?

Selecciona la opción correcta.

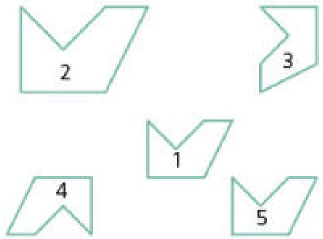
1. Las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$ son dos números cuya suma es -3 y cuyo producto, -10. ¿Qué factorización corresponde a la ecuación?

   a) $(x - 5)(x + 2) = 0$ b) $(x + 5)(x - 2) = 0$ c) $(x + 5)(x + 2) = 0$ d) $(x - 5)(x - 2) = 0$

2. En un terreno rectangular de 500 m², los lados largo y corto suman 45 m. Si x representa la longitud de un lado, ¿qué ecuación corresponde a la situación anterior?

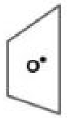
   a) $x(x - 45) = 500$ b) $x(45 - x) = 500$
   c) $x(x + 45) = 500$ d) $x(-x - 45) = 500$

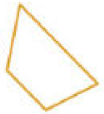
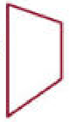
3. ¿Qué figura del diagrama es una traslación del polígono 1?



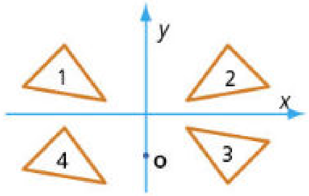
   a) La figura 2.
   b) La figura 3.
   c) La figura 4.
   d) La figura 5.

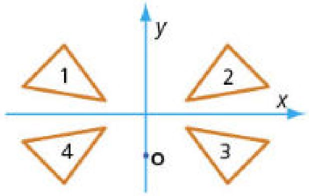
4. Si se considera a O como centro de rotación, ¿qué figura se obtiene al rotar 90° el cuadrilátero de la derecha en el sentido de las manecillas del reloj?

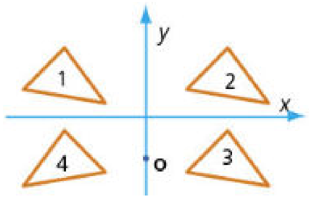


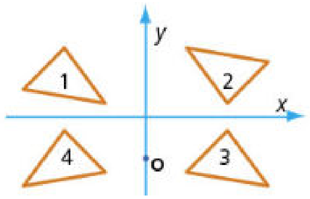
   a)  b)  c)  d) 

5. Se reflejará el triángulo 1 respecto al eje y; la figura resultante (2) se reflejará respecto al eje x; la nueva figura resultante (3) se rotará 180° tomando como centro de rotación el punto O, y se obtendrá como resultado la figura 4. ¿Qué opción muestra la construcción correcta?

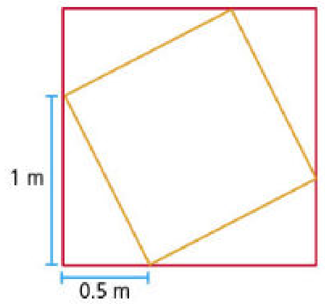
   a)


   b)


   c)


   d)


6. La señora Celís remodelará su jardín cuadrado, para que en el centro quede otro cuadrado más pequeño, como muestra el diagrama de la derecha. ¿Qué expresión representa el área del cuadrado pequeño?

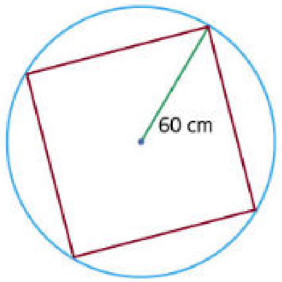


a) $(1\ \text{m} + 0.5\ \text{m})^2$
b) $(1\ \text{m})^2 + (0.5\ \text{m})^2$
c) $(1\ \text{m})^2$
d) $(0.5\ \text{m})^2$

7. ¿Qué terna de números corresponde a las medidas de los lados de un triángulo rectángulo?

a) 2 cm, 6 cm y 7 cm
b) 4 cm, 8 cm y 9 cm
c) 5 cm, 12 cm y 13 cm
d) 10 cm, 11 cm y 15 cm

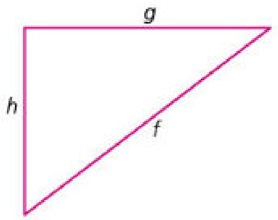
8. La señora Aguilar diseñó una mesa circular con una estructura cuadrada en su interior, como muestra el diagrama de la derecha. Si el radio de la mesa será de 60 cm, ¿cuánto medirá cada lado de la estructura cuadrada?



a) 42.4 cm
b) 43.8 cm
c) 84.9 cm
d) 87.6 cm

9. Si en un triángulo rectángulo, f representa la hipotenusa y g y h, los catetos, ¿qué igualdad es falsa?

a) $f^2 + g^2 = h^2$
b) $\sqrt{g^2 + h^2} = f$
c) $h^2 = f^2 - g^2$
d) $g = \sqrt{f^2 - h^2}$



10. En cierto partido de futbol, la probabilidad de que gane el equipo local es $\frac{7}{10}$; la de que lo haga el equipo visitante, $\frac{1}{10}$. ¿Qué probabilidad hay de que el partido termine en empate?

a) $\frac{8}{10}$
b) $\frac{2}{10}$
c) $\frac{6}{10}$
d) $\frac{4}{10}$

Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas con las del grupo y valídalas.

Desafío del bloque

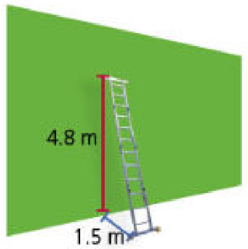
Escaleras multifuncionales

Una empresa de remodelaciones y reparaciones usa escaleras de cuatro tramos para llevar a cabo sus funciones. La tabla muestra los modelos que usan.

Modelo	A	B	C	D
Longitud recogida (m)	1.00	1.25	1.50	1.75
Longitud extendida (m)	4.00	5.00	6.00	7.00
Altura en tijera (m)	1.94	2.42	2.90	3.39
Abertura de tijera (m)				

Pregunta 1
- Explica cómo se relacionan la longitud extendida y la longitud recogida de cada modelo, y el porqué de esta relación.

Pregunta 2
- La empresa usará una escalera extendida para una reparación. Se requiere alcanzar por lo menos una altura de 4.8 m pero, por cuestiones de seguridad, la escalera debe situarse a 1.5 m de la pared. Explica qué modelos pueden usar y por qué.



Pregunta 3
- Para cambiar el foco de una luminaria, deben alcanzar una altura de 6.5 m. ¿Qué escalera necesitan y a qué distancia del poste deben colocarla? Ilustra la solución con un dibujo.

Pregunta 4
- ¿Cuánto mide la abertura de tijera del modelo C (segmento rojo)?

Pregunta 5
- Completa los datos faltantes de la tabla.

Al terminar, efectúa la autoevaluación del bloque 2 en la página 246.

BLOQUE 3

Aprendizajes esperados

El estudiante:

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos.

Joseph Fourier

3.1 Problemas mediante ecuaciones cuadráticas

Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplico la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

Cálculo mental

a) $5x^2 - 2x =$ ______, $x = 3$

b) $\frac{3}{2}x^2 - 4x =$ ______, $x = -2$

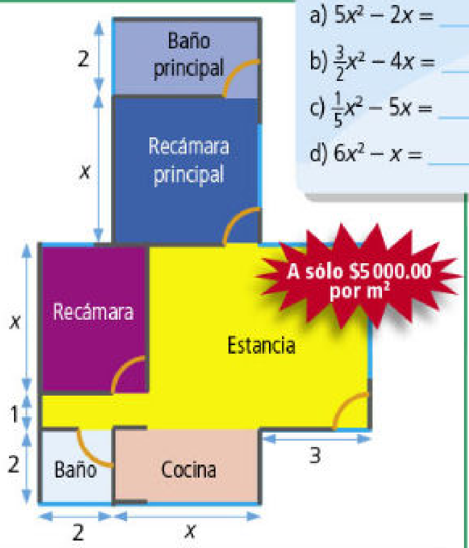
c) $\frac{1}{5}x^2 - 5x =$ ______, $x = 4$

d) $6x^2 - x =$ ______, $x = -7$

Activo mis competencias

Trabaja en equipo. Lean la información y respondan en su cuaderno.

La familia Gómez desea comprar una casa. El vendedor les dijo que hay tres tipos (A, B y C) y les envió un folleto con el croquis general de las tres. Posteriormente, el vendedor les llamó para complementar la información de cada casa; sin embargo hubo mala recepción en la línea telefónica y los Gómez sólo alcanzaron a tomar los datos que se indican en la tabla. Ellos desean averiguar qué opción les conviene elegir ya que tienen un librero de 4.6 m de largo que quieren colocar dentro de la recámara principal.



Tipo	Área 1 (Recámara y baño principales)	Área 2 (Estancia y recámara)	Área 3 (Cocina y baño)	Área total	Precio
A	24 m²	45	15	84 m²	$420 000.00
B	35	60 m²	17.5	112.5	
C				94.5	$472 500.00

- Determinen la expresión para calcular cada una de las áreas 1, 2 y 3.
- Analicen los datos de la tabla. Planteen y resuelvan una ecuación para encontrar el largo de la recámara principal del tipo A y el largo del tipo B. Con esa información completen las dos primeras filas de la tabla.
- Determinen una expresión algebraica para encontrar el área total de cualquiera de las casas.
- Propongan y resuelvan una ecuación para encontrar el largo de la recámara principal de la casa tipo C.
- ¿Qué casa les conviene elegir? Justifiquen su respuesta.

◆ **Comparen sus respuestas con las del grupo. Analicen las estrategias empleadas para encontrar el largo de las recámaras, ¿usaron la misma estrategia para los tres tipos de casas? Discutan y con ayuda del profesor decidan cuál fue el criterio más adecuado para elegir el inmueble que le conviene comprar a la familia Gómez.**

Consolido mis competencias

Actividad 1. Completa la tabla. Analiza qué debe hacerse para que cada ecuación quede expresada en su forma general: $ax^2 + bx + c = 0$.

a) Determina los valores de *a*, *b* y *c* para que las ecuaciones estén en su forma general.

Ecuación	*a*	*b*	*c*
$5x^2 - 2x + 1 = 0$			
$10x^2 - 6 = 18$			
$x^2 - 3x - 7 = 18$			
$2x^2 - 3x - 9 = 20$			

b) Utiliza los valores y forma la ecuación cuadrática en su forma general.

a	*b*	*c*	Ecuación
−7	0	4	
15	−3	1	
1	5	2	
9	7	0	

◆ Lean la información y concluyan por qué en la fórmula anterior se pide que el valor del coeficiente *a* no sea cero; escríbanlo en su cuaderno. Resuelvan las ecuaciones de la tabla mediante la fórmula general.

Formalización. En la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 - bx + c = 0$, ax^2 es el término cuadrático, bx el término lineal y c el término independiente

La **fórmula general** para resolver cualquier ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 - bx + c = 0$; donde $a \neq 0$, b y c son los coeficientes de la ecuación es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

◆ Compara tus respuestas con las del grupo, comenten sus reflexiones sobre qué finalidad tiene conocer los valores de los coeficientes *a*, *b* y *c* en una ecuación cuadrática.

Consolido mis competencias

Actividad 2. Trabaja en pareja. Lean el problema y resuélvanlo mediante la factorización y la fórmula general.

Adriana pensó un número, lo elevó al cuadrado y multiplicó el resultado por 5. Al resultado que obtuvo le sumó seis veces el mismo número que pensó y para su sorpresa, obtuvo −1.

- Hay dos números en los que pudo haber pensado Adriana. ¿Cuáles son? ____________
- Escriban su procedimiento. ____________

◆ **Mencionen cómo obtuvieron la expresión algebraica, así como las ventajas o desventajas de utilizar la fórmula general y la factorización.**

Actividad 3. Resuelve, en equipo, mediante la fórmula general y contesten.

a) $2x^2 - 5x = -3$

x_1	x_2

- Escriban la ecuación en su forma general. ____________
- ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ____________
- ¿Cuál es el valor de $b^2 - 4ac$? ____________

b) $2x^2 - 3 = 0$

x_1	x_2

- Anoten la ecuación en su forma general. ____________
- ¿Qué valor tiene el coeficiente *b*? ____________
- ¿Cómo son las soluciones cuando *b* vale cero? ____________

c) $16x^2 + 1 = 8x$

x_1	x_2

- ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ____________
- ¿Cuál es el valor de $b^2 - 4ac$? ____________

Recuerda

Un número positivo tiene dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa. Sin embargo, el símbolo de raíz cuadrada siempre toma el valor positivo.

Por ejemplo, las raíces de 81 son $\sqrt{81} = 9$ y $-\sqrt{81} = -9$

- ¿Los signos ± de la fórmula general influyen en el resultado? ______

Expliquen. ______

d) $x^2 - 4x + 3 = 0$

x_1	x_2

- ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ______
- ¿Cuál es el valor de $b^2 - 4ac$? ______

e) Completen la tabla con los valores que obtuvieron en los incisos anteriores.

Ecuación	a	b	c	$b^2 - 4ac$	Número de soluciones
$2x^2 - 5x = -3$					
$2x^2 - 3 = 0$					
$16x^2 + 1 = 8x$					
$x^2 - 4x + 3 = 0$					

- ¿De qué manera el valor de $b^2 - 4ac$ afecta la solución de una ecuación cuadrática? ______

◆ **Comenten sus respuestas con el grupo y reflexionen sobre cómo influyen los valores del término independiente y de los coeficientes de los términos cuadrático y lineal, al sustituirlos en la fórmula general, así como el valor de $b^2 - 4ac$ en las soluciones.**

Formalización. A la expresión $b^2 - 4ac$ se le llama **discriminante** porque permite discriminar, es decir, diferenciar entre aquellas ecuaciones con una, dos o ninguna solución.

Discriminante	Tipo de solución
$b^2 - 4ac > 0$	Dos soluciones
$b^2 - 4ac = 0$	Solución única
$b^2 - 4ac < 0$	Sin solución en los números reales

Consolido mis competencias

Actividad 4. **Resuelve las actividades y responde.**

a) Escribe si las ecuaciones tienen una solución, dos soluciones o ninguna solución.

Ecuación	Soluciones
$x^2 + 3x + 3 = 0$	
$4x^2 + x - 3 = 0$	
$7x^2 + 2x = 0$	
$4x^2 + 4x + 1 = 0$	
$3x^2 + 1 = 0$	
$3x^2 + 12x + 12 = 0$	
$x^2 + 5x + 3 = 0$	
$3x^2 - 1 = 0$	
$4x^2 + x + 3 = 0$	
$x^2 + 3x - 3 = 0$	

- Describe, en tu cuaderno, qué ocurre con las soluciones si cambia el signo del coeficiente c.

b) Anota, en la primera fila, dos ecuaciones cuadráticas distintas con una solución y que ésta sea la misma. En las otras filas escribe dos pares de ecuaciones cuadráticas con las mismas soluciones.

Ecuación 1	Solución	Ecuación 2	Solución

◆ **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Explica cómo determinaste si las ecuaciones tienen una, dos o ninguna solución, si empleaste la fórmula general o qué método usaste.**

Consolido mis competencias

Actividad 5. Trabaja en equipo. Escriban un término independiente de modo que la ecuación tenga tantas soluciones como se indica en el paréntesis de la derecha. Anoten, en cada caso, las soluciones y compárenlas con las de otros compañeros.

a) $2x^2 + 4x +$ ________ $= 0$ (dos soluciones); $x_1 =$ ________, $x_2 =$ ________

b) $2x^2 + 4x +$ ________ $= 0$ (una solución); $x_1 =$ ________, $x_2 =$ ________

c) $2x^2 + 4x +$ ________ $= 0$ (ninguna solución); $x_1 =$ ________, $x_2 =$ ________

- Escriban cuántos valores puede tener el término independiente en el inciso a). ________

TIC La proporción áurea se obtiene de una ecuación de segundo grado. En www.redir.mx/matfort3-118 podrás ver cómo obtenerla. Encuentra las raíces usando la fórmula general.

- Anoten cuántos valores puede tener el término independiente en el inciso b). Justifiquen.
- En el inciso b), ¿el término independiente puede tener varios valores? ¿Por qué?
- ¿Por qué el inciso c) no se puede resolver? ________

◆ Analicen, en grupo, la siguiente afirmación. La fórmula general se puede utilizar para todos los valores de *a*, *b* y *c*, excepto cuando $a = 0$. Expliquen a sus compañeros la validez de lo anterior.

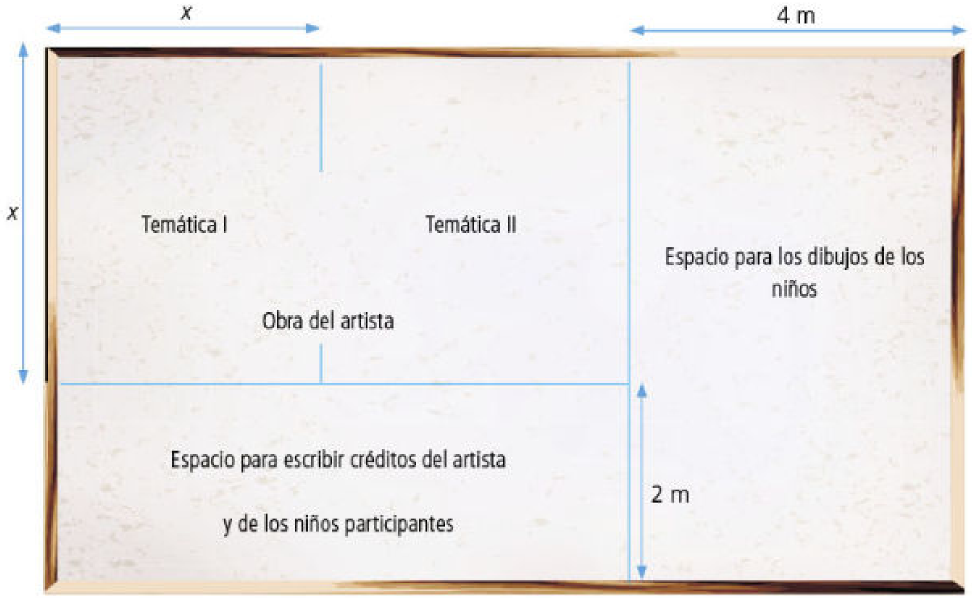
◆ Resuelvan, con el grupo, lo siguiente. Escriban una ecuación de segundo grado que dé como soluciones $x_1 = 0$ y $x_2 = 6$.

◆ ¿Podrán escribir una ecuación de segundo grado incompleta sin solución? Comenten, con el grupo, y justifiquen.

Consolido mis competencias

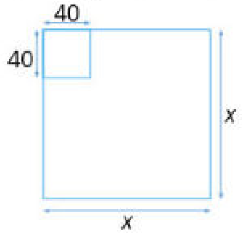
Actividad 6. Resuelve, en equipo, mediante la aplicación de la fórmula general y respondan en su cuaderno.

a) Un artista pintará un mural, las dimensiones de su boceto se muestran en la imagen de abajo. Lo único que él sabe, es que necesita dejar 4 m de pared libre para que los niños hagan algunos dibujos y 2 m de alto para los créditos, que su espacio lo dividirá para las dos temáticas que presentará y que el área de la pared es de 128 m². Ayúdalo a encontrar las dimensiones para su obra, ya que cobrará por metro cuadrado.



- Escriban la ecuación cuadrática que representa el área del boceto.
- ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la base del boceto?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la altura del boceto?
- ¿Cuál es el área del espacio destinado a la obra del artista?
- ¿Cuánto mide el área destinada para escribir los créditos del artista y de los niños participantes?

b) Una casa de eventos acaba de adquirir un terreno cuadrado y quieren tener un estacionamiento que ocupe una parte cuadrada con 40 m de lado; el resto del terreno tiene un área de 10 500 m². ¿Cuánto mide el lado del terreno que se compró?



Nota histórica

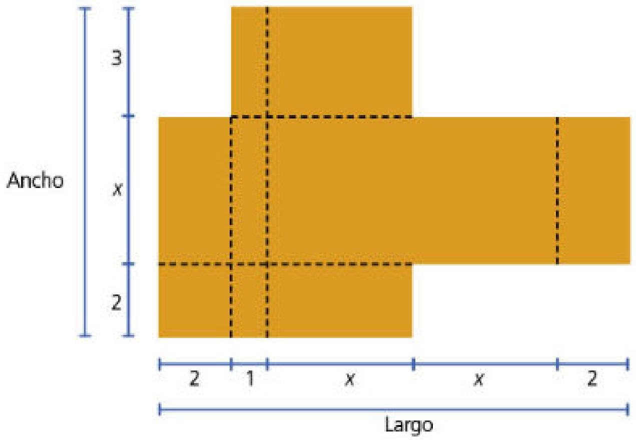
Los antiguos matemáticos griegos, como Diofanto, no conocían la fórmula general para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática como tú, pero resolvían problemas tales como: "la suma de dos números es 20 y la diferencia de sus cuadrados es 80". Encuentra la ecuación cuadrática asociada al problema y resuélvela usando la fórmula general de segundo grado.

c) El cuadrado de un número positivo más el doble de su opuesto es 960. ¿Cuál es ese número?

◆ **Comenten con el grupo la manera en que resolvieron los problemas. Comparen sus ecuaciones, cómo asignaron la incógnita y las soluciones obtenidas en cada caso.**

Actividad 7. Retoma el problema de la sección "Activo mis competencias". Resuelve lo que se te pide.

Josué, el hijo mayor de los Gómez, sugirió dividir de la siguiente forma el croquis general de las casas para encontrar directamente una fórmula que exprese su área total. Dice que así es posible plantear una ecuación para cada tipo de casa y resolverla para conocer rápidamente el largo de las recámaras (x).



- Completa los espacios en blanco y simplifica la expresión. Cada término representa el área de una región.

A_T = 4 + ____ + ____ + ____ + ____ + ____ + ____ + ____ + ____

A_T = ____________________

- Usa la expresión que encontraste para el área total y calcula, en tu cuaderno, el largo de las recámaras de los tres tipos de casas.

◆ Compara tus respuestas con las de la sección "Activo mis competencias" y corrige los posibles errores. ¿Es correcto el método propuesto por Josué?

◆ Analiza, con tus compañeros, qué métodos emplearon para resolver las ecuaciones cuadráticas de las distintas actividades y en qué casos conviene usar cada uno.

3.2 Problemas de criterios de congruencia y semejanza

Aplico los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

Cálculo mental

a) $\frac{x}{12} = \frac{90}{36}$ x = ________

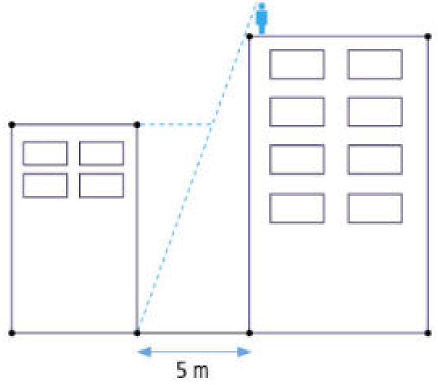
b) $\frac{8}{5} = \frac{a}{50}$ a = ________

c) $\frac{4}{n} = \frac{24}{36}$ n = ________

d) $\frac{21}{45} = \frac{7}{e}$ e = ________

Activo mis competencias

Una persona que está parada a 65 cm de la orilla de un edificio puede ver que el borde del edificio está alineado con la base de la casa de enfrente. Sus ojos se encuentran a 164 cm del piso de la azotea. ¿Cuál es la altura del edificio?



a) ¿Cómo son los triángulos que se forman con la línea visual del individuo y la altura de ambos edificios? ____________________

b) ¿Qué criterio utilizas para afirmar tu respuesta? ____________________

c) ¿Qué ángulos son congruentes entre sí?

______ y ______ ______ y ______ ______ y ______

d) ¿Qué parejas de lados son correspondientes entre sí?

______ y ______ ______ y ______ ______ y ______

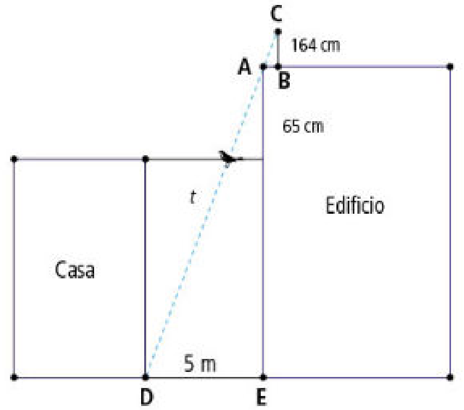
◆ ¿Con esta información es posible obtener la altura de la casa de enfrente? Escribe tus argumentos en el cuaderno. En caso de que tu respuesta sea afirmativa, anota la altura de la casa y tu procedimiento; si es negativa, escribe qué datos necesitarías para obtener la altura de la casa.

◆ Presenta ante el grupo tu procedimiento y validen sus respuestas.

Consolido mis competencias

Actividad 8. Trabaja en pareja. Sigan las instrucciones y respondan.

a) Un ave se colocó en un cable que está a la altura de la casa y a una distancia de 1.5 m del edificio. Así, el observador pudo calcular la altura de la casa.



b) ¿Qué triángulos semejantes al triángulo **ADE** se forman con la posición del ave?

________ y ________

c) Escriban dos procedimientos posibles para encontrar la altura de la casa a partir de la información que se tiene en el esquema.

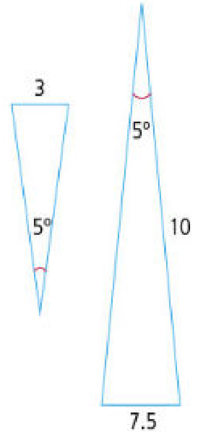
Procedimiento 1 ____________________

Procedimiento 2 ____________________

- Compartan con el resto del grupo las respuestas de los incisos b) y c); expónganles su procedimiento y validen sus respuestas.
- Comenten cómo es posible obtener de diferentes maneras un mismo resultado y qué criterios de semejanza utilizaron para obtener las distancias faltantes.

Consolido mis competencias

Actividad 9. Resuelve los siguientes problemas.



a) Justifica que los triángulos isósceles son semejantes. Escribe el criterio en el que te apoyas para argumentar tu respuesta. Las medidas están dadas en centímetros.

____

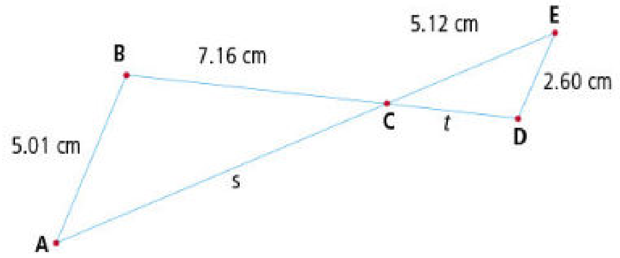
b) Calcula el perímetro del triángulo menor. $P =$ ________

c) Considera otro triángulo isósceles cuyo ángulo desigual mide 5°. ¿Este triángulo es semejante a los de la imagen? ________ Argumenta tu respuesta.

____

d) Encuentra los valores de s y t, sabiendo que **AB** es paralela a **DE**.

$s =$ ________ $t =$ ________

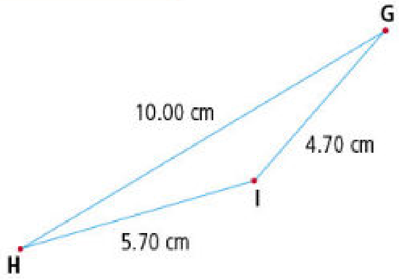


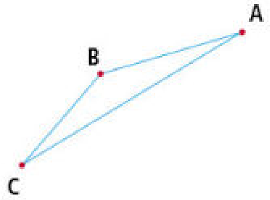
e) ¿Qué criterio se utiliza para concluir que los triángulos **ABC** y **CDE** son semejantes?

________ Argumenta tu respuesta. ________

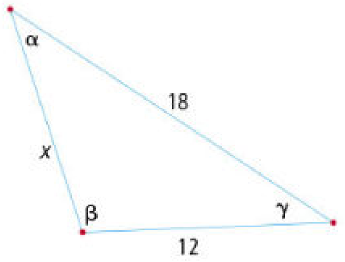
f) El triángulo **ABC** es semejante al triángulo **HIG** en una razón de $\frac{3}{5}$. Obtén el perímetro del triángulo **ABC**.

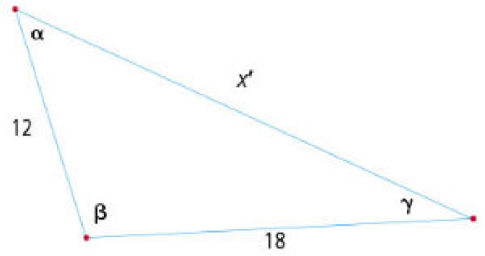
P = ______________





g) En un grupo hubo un debate sobre si los siguientes triángulos eran congruentes. La mitad del grupo argumentaba que sí, pues tenían cinco elementos que coincidían: sus tres ángulos y la medida de dos de sus lados. La otra mitad argumentaba que no lo eran.





- Escribe tu opinión. ____

- ¿Qué tipo de argumentos consideras que tenían quienes estaban en contra de que los triángulos no fueran congruentes? Escríbelos. ______________________

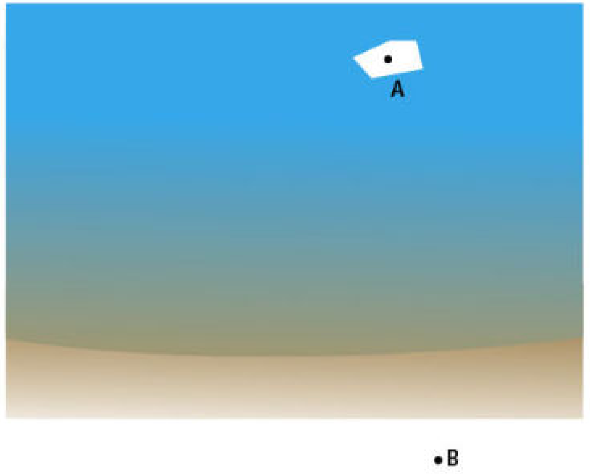
- Si los triángulos son semejantes por el criterio (ángulo–ángulo–ángulo), obtén su razón de semejanza y escríbela. ______________________
- Encuentra el valor de x ______________ y de x' ______________

◆ **Compara tus respuestas del inciso g) con las de algún compañero y mencionen qué deben considerar para verificar que dos triángulos son semejantes o congruentes.**

Actividad 10. Trabaja en equipo. Lean las instrucciones y respondan las preguntas que ayudarán a resolver el problema.

a) Analicen la imagen de abajo y comenten de qué manera aplicarían lo aprendido para obtener la distancia que hay de una caseta de vigilancia (punto **B**), a una embarcación que se encuentra en el agua (punto **A**).

- Escriban un plan para resolverlo; no importa si después requieren hacer correcciones.



TIC Entra a www.redir.mx/matfort3-125, haz las actividades y, con tu lenguaje, escribe una conclusión en tu cuaderno.

b) Dos equipos utilizaron los siguientes métodos para encontrar la distancia de la embarcación (punto **A**) a la caseta de vigilancia (punto **B**). Observen los trazos en la página siguiente.

- Equipo I, trazó $\overline{\mathbf{DE}}$ paralela a $\overline{\mathbf{AB}}$.
- Equipo II, trazó $\overline{\mathbf{IJ}}$ paralela a $\overline{\mathbf{BH}}$.

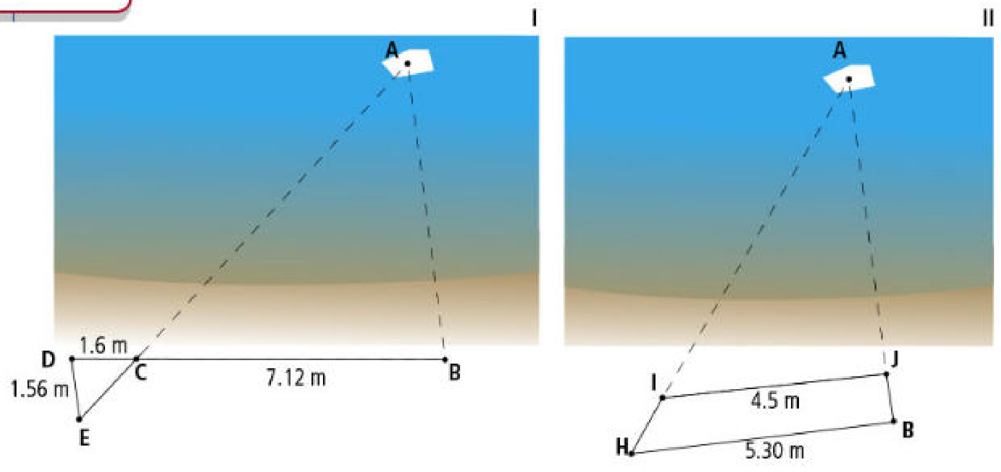
Recuerda

El símbolo Δ significa triángulo y el símbolo ~ significa semejante.
Así Δ**ABC** ~ Δ**EDC**, se lee, "el triángulo **ABC** es semejante al triángulo **EDC**".

c) Analicen cada caso y encuentren los criterios de semejanza que utilizaron para hallar la distancia $\overline{AB}$.

Δ**ABC** ~ Δ**EDC** por el criterio ______________________

Δ**ABH** ~ Δ**AJI** por el criterio ______________________



d) Encuentren la distancia $\overline{AB}$ según el procedimiento del equipo I. $\overline{AB}$ = ____________

e) El equipo II eligió una de las siguientes medidas para representar la distancia $\overline{AJ}$. Seleccionen la correcta.

$\overline{AJ} = \overline{AB} - 1$ $\qquad$ $\overline{AJ} = 1 - \overline{AB}$ $\qquad$ $\overline{AJ} = \overline{AB}$

f) Determinen la distancia $\overline{AB}$ según el procedimiento del equipo II. $\overline{AB}$ = ____________

g) Compartan con el resto del grupo los resultados que obtuvieron en los incisos c) y e). Escriban si hubo diferencias entre las medidas que obtuvieron con los procedimientos I y II.

____

____

____

◆ **Si hubo diferencias, discutan por qué no son iguales para ambos casos y elijan cuál es el mejor procedimiento, el más certero. Si con ambos procedimientos calcularon la misma distancia, entonces comenten por qué consideran que ambos funcionaron.**

3.3 Teorema de Tales

Resuelvo problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

Cálculo mental

a) $\frac{1}{5} + 0.2 =$ ____________

b) $\frac{1}{4} - 0.25 =$ ____________

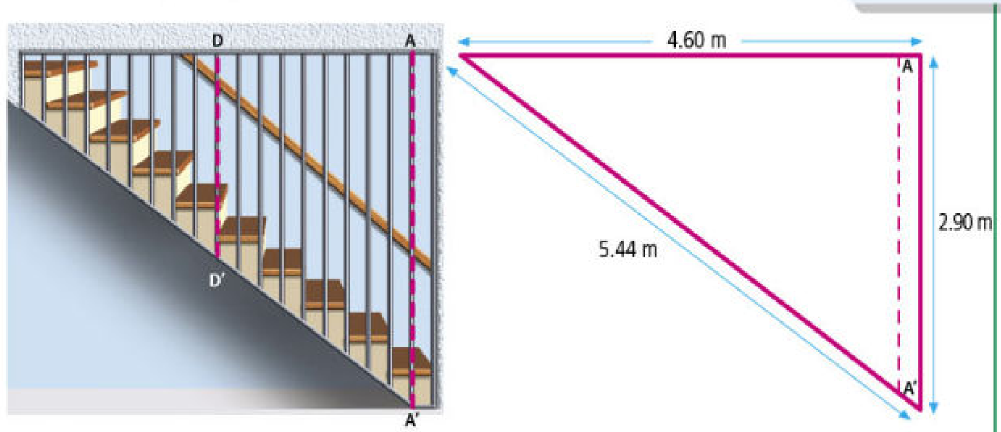
c) $0.1 + \frac{1}{10} =$ ____________

d) $\frac{1}{100} + \frac{10}{100} =$ ____________

e) $\frac{20}{40} + \frac{60}{90} =$ ____________

Activo mis competencias

Observa la protección de la escalera en el interior de una casa. El propietario contrató a una persona para elaborarla, con la indicación de que la distancia entre los barrotes, paralelos entre sí, fuera de 20 cm. El herrero tomó las medidas del perímetro de la protección y elaboró un esquema para calcular la medida del barrote $\overline{AA'}$.



a) ¿Cuál es la longitud del barrote $\overline{AA'}$? ______________________

b) ¿Cuál es la medida del barrote $\overline{DD'}$? ______________________

c) Si la medida del segmento $\overline{AD}$ es 1.80 m, ¿cuánto mide el segmento $\overline{A'D'}$?

Justifica tu respuesta. ______________________

____

d) Describe el procedimiento que utilizaste para solucionarlo. ______________________

____

____

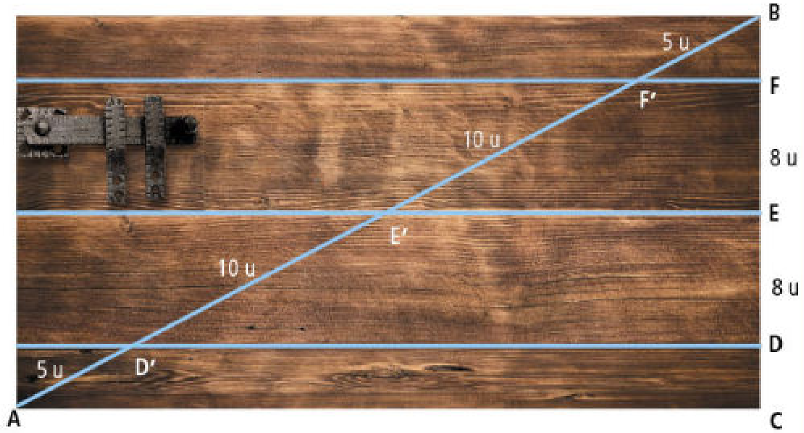
◆ Comenta, en equipo, los procedimientos usados para resolver el problema. Expongan, mediante argumentos, sus conclusiones ante el grupo. Identifiquen y corrijan los posibles errores.

Consolido mis competencias

Actividad 11. Observa, en parejas, las medidas de la puerta de madera y respondan.

¿Sabías que...

Tales de Mileto vivió entre 624 y 546 a. C., y calculó la altura de la gran pirámide de Keops? Investiga cuál fue su procedimiento y exponlo ante el grupo.



a) ¿Cuál es la medida del ancho de las tablas en los extremos? ____________ unidades (u).

b) ¿Qué relación existe entre la medida de los segmentos $\overline{BF'}$, $\overline{F'E'}$, $\overline{E'D'}$ y $\overline{D'A}$?

____

____

c) ¿Qué otras relaciones encuentras entre las tablas de la puerta de madera?

____

____

____

d) Observen que las rectas secantes **AB** y **BC** son cortadas por las rectas paralelas: **FF'**, **EE'**, **DD'** y **CA.** ¿Qué relación existe entre las medidas de los lados correspondientes?

____

e) ¿Cómo son entre sí los triángulos **BFF'** y **BEE'**? ____________

Justifiquen. ______________________________

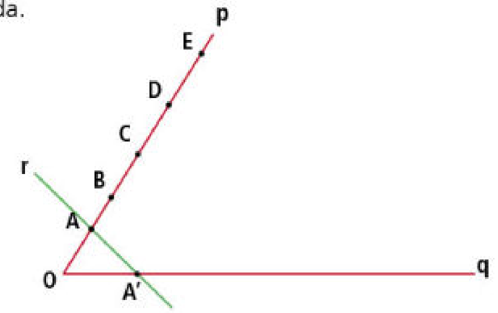
____

◆ **Contrasten sus razonamientos con los de otros compañeros y corrijan sus errores.**

Consolido mis competencias

Actividad 12. Lleva a cabo las actividades y responde.

a) Las rectas **p** y **q** se intersecan en el punto **O**. Traza líneas paralelas a la recta **r**, que pasen por los puntos **B**, **C**, **D** y **E** de la recta **p**. Coloca los puntos **B'**, **C'**, **D'** y **E'** sobre la recta **q**, según corresponda.



Recuerda

La razón de semejanza de un triángulo **ABC** respecto a un triángulo **A'B'C'** se calcula dividiendo la medida de sus lados correspondientes.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$$

b) Mide los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$, que están sobre la recta **p**; procede de la misma manera con los segmentos $\overline{OA'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ y $\overline{D'E'}$, que están sobre la recta **q**. Registra los resultados que obtuviste en la siguiente tabla.

Recta p	$\overline{OA}$ =	$\overline{AB}$ =	$\overline{BC}$ =	$\overline{CD}$ =	$\overline{DE}$ =
Recta q	$\overline{OA'}$ =	$\overline{A'B'}$ =	$\overline{B'C'}$ =	$\overline{C'D'}$ =	$\overline{D'E'}$ =

c) Calcula la razón de semejanza entre los segmentos correspondientes (hasta dos decimales).

$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \square$ $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \square$ $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \square$ $\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \square$ $\frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \square$

- ¿Cómo son entre sí las razones de los segmentos correspondientes? ____________
- ¿Se mantendrá esa misma relación entre las medidas de segmentos comprendidos en puntos no consecutivos, por ejemplo, los segmentos $\overline{AD}$ con $\overline{A'D'}$? ____________

  Explica. ______________________________

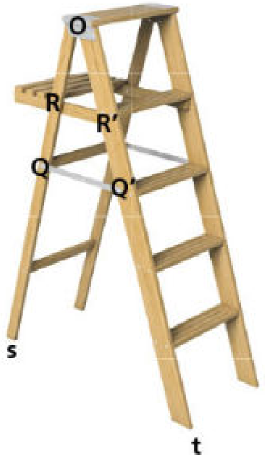
  ____
- ¿Los triángulos **AOA'** y **BOB'** son semejantes? ________ Explica tu respuesta. ________

  ____
- ¿Qué otros triángulos semejantes existen en el trazo? ____________

◆ **Reflexiona, con el grupo, las respuestas del último inciso. ¿Qué originó el hecho de que los lados correspondientes fueran proporcionales?**

Consolido mis competencias

Actividad 13. Resuelve a partir de los datos de la imagen.



En la escalera, las rectas **t** y **s** (rieles anterior y posterior) se intersecan en el punto **O** (tapadera). Las rectas que pasan por **RR'** y **QQ'** (bandeja y tensor) son paralelas entre sí.

a) Completa la tabla.

Escalera			Razón entre lados correspondientes
Riel anterior	$\overline{R'O} = 0.5$ m	$\overline{Q'O} = 1.5$ m	$\frac{\overline{R'O}}{\overline{Q'O}} =$
Riel posterior	$\overline{RO} = 0.5$ m	$\overline{QO} = 1.5$ m	$\frac{\overline{RO}}{\overline{QO}} =$

b) ¿Cómo son entre sí las medidas de los segmentos $\overline{R'O}$ con $\overline{Q'O}$, y $\overline{RO}$ con $\overline{QO}$? ______

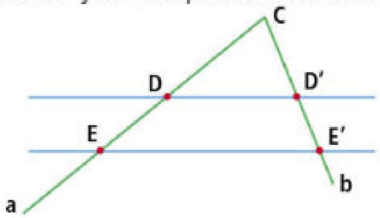
c) Justifica tu respuesta. ______

d) En el proceso de fabricación de la escalera, al colocar la bandeja $\overline{RR'}$ y el tensor $\overline{QQ'}$ en forma paralela, ¿qué relación produjo entre los lados correspondientes de los rieles anterior (**t**) y posterior (**s**)? ______

e) Justifica tu respuesta. ______

Actividad 14. Observa la figura y responde.

Las rectas **a** y **b** se intersecan en el punto **C**. Los segmentos $\overline{DD'}$ y $\overline{EE'}$ son paralelos entre sí.



a) ¿Cómo son los lados de las rectas transversales **a** y **b** al ser cortadas por las rectas paralelas **DD'** y **EE'**? ______

b) Identifica los lados correspondientes y establece la razón de proporción $\left(\frac{x}{y}\right)$ entre ellos.

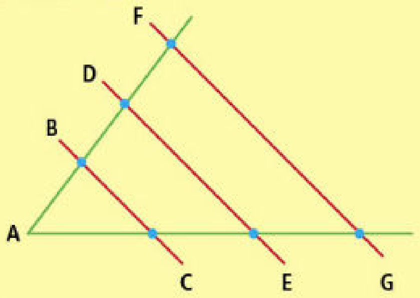
______

c) ¿Los triángulos **ECE'** y **DCD'** son semejantes entre sí? ______

d) Justifica tu respuesta. ______

______

Formalización. El **teorema de Tales** afirma que cuando tres o más rectas paralelas cortan a dos transversales se cumple que los segmentos correspondientes entre las secantes son proporcionales.



$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AG} = \frac{BF}{CG} = \frac{DF}{EG} = \frac{AC}{BC} = \frac{AE}{DE} = \frac{AG}{FG} = \frac{BC}{DE} = \frac{DE}{FG}$$

Actividad 15. Aplica el teorema de Tales y resuelve.

a) Divide el segmento $\overline{OD'}$ en cuatro partes iguales, para ello haz lo siguiente.

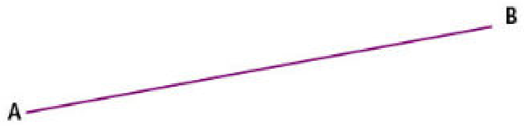
- Traza un segmento de recta **r** con origen en el punto **O**.
- Coloca cuatro puntos que estén a la misma longitud, entre ellos, sobre la recta **r**. Llama a esos puntos **A, B, C** y **D**.
- Une con una recta los puntos **D** y **D'**.
- Traza paralelas a la recta **DD'**, que pasen por los puntos **A**, **B** y **C** y crucen a la recta **OD'**. Nombra a estas intersecciones **A'**, **B'** y **C'**.

- Argumenta por qué los segmentos $\overline{OA'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ y $\overline{C'D'}$ son iguales.

______

______

b) Divide el segmento $\overline{AB}$ en dos partes, de tal forma que la razón entre las medidas de las partes sea $\frac{2}{3}$.



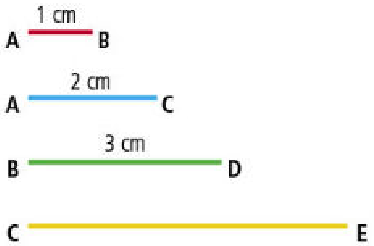
c) Traza, en tu cuaderno, tres segmentos y divide cada uno de ellos en las razones: $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{10}$ y 1 a 0.5.

d) Traza, en tu cuaderno, la medida correcta de x; considera la relación entre los segmentos indicados.

Entra a www.redir.mx/matfort3-132; usa tu ingenio y el teorema de Tales para calcular el dato solicitado.

TIC

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{x}$$



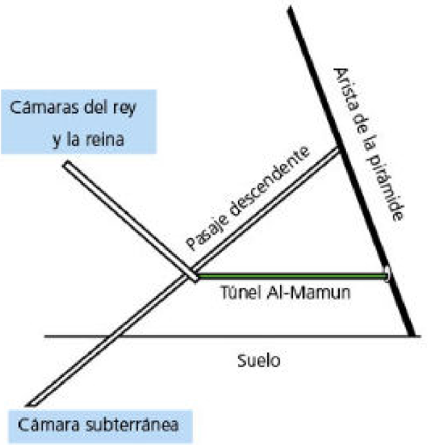
◆ Explica a un compañero qué significa que un segmento se divida en una razón $\frac{2}{3}$. ¿En cuántas partes iguales lo necesitarían dividir primero?

Actividad 16. Lee con atención y resuelve el problema.

La gran pirámide de Guiza es la más antigua de las siete maravillas del mundo y la única que aún perdura.

La entrada original fue obstruida por grandes bloques de granito. En el año 800 a. C., el rey Al-Mamun ordenó la construcción del acceso actual, paralelo al suelo y cuya entrada está a 6 m sobre la arista de la pirámide.

Los constructores sabían que la antigua entrada se ubicaba a 26 m sobre la arista de la pirámide y que la distancia sobre el suelo, del extremo de la pirámide al pasaje que conducía a la cámara subterránea era de 47 m. ¿Cuál era la longitud aproximada del túnel que debían cavar para encontrarse con el pasaje que les diera acceso a todas las cámaras?



- Traza, en el diagrama, los elementos geométricos y escribe los datos que consideres necesarios.
- Describe, en tu cuaderno, el procedimiento que empleaste para resolverlo.

◆ Analiza, con el grupo, los procedimientos que llevaron a cabo para la resolución de los problemas. ¿Cómo los aplicarías para resolver el problema de la sección "Activo mis competencias"?

Para la siguiente lección consigan: una linterna, un pliego de papel bond, marcadores, cartoncillo y un palillo de madera de 30 cm.

3.4 Figuras homotéticas

Aplico la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

Cálculo mental

a) $2 \times \frac{1}{3} =$ ______
b) $-5 \times \frac{7}{9} =$ ______
c) $3 \times \frac{4}{5} =$ ______
d) $-6 \times \frac{1}{6} =$ ______
e) $-4 \times \frac{5}{8} =$ ______

Activo mis competencias

Analiza la información, resuelve las actividades y responde.

El 9 de agosto de 2010, el Banco de México puso en circulación el nuevo billete de $100.00.

Utiliza la imagen del billete que aparece a continuación, encuentra la proporción que hay entre el rostro de Nezahualcóyotl con su imagen en marca de agua.

a) ¿Cuántas veces es más grande la imagen de Nezahualcóyotl que su marca de agua?

______

b) Explica cómo lo averiguaste. ______

______

______

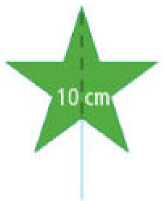
◆ Comparte tu procedimiento y resultado con tus compañeros. Si es posible, utiliza un billete real y compruébalo.

◆ Investiga en qué situaciones u objetos se utiliza lo anterior, es decir, que se vea una misma imagen aumentada cierta cantidad de veces.

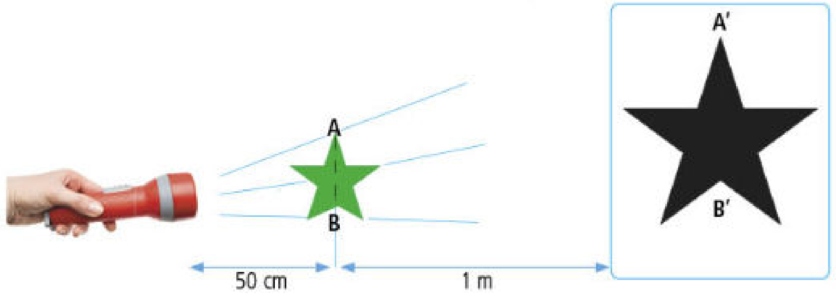
Actividad 17. Trabaja en equipo.

a) Consigan el siguiente material: una linterna, un pliego de papel bond, marcadores, cartoncillo y un palillo de madera de 30 cm.

b) Tracen la silueta de una estrella en papel cartoncillo, recórtenla por su perímetro y péguenle un palillo de madera, como se muestra en la imagen.



c) Coloquen un pliego de papel bond sobre la pared, y proyecten sobre éste la sombra de la estrella. Observen la imagen.



d) Acerquen y alejen la linterna de la estrella, ¿qué sucede en ambos casos?

Escriban sus observaciones. ______________________________

____

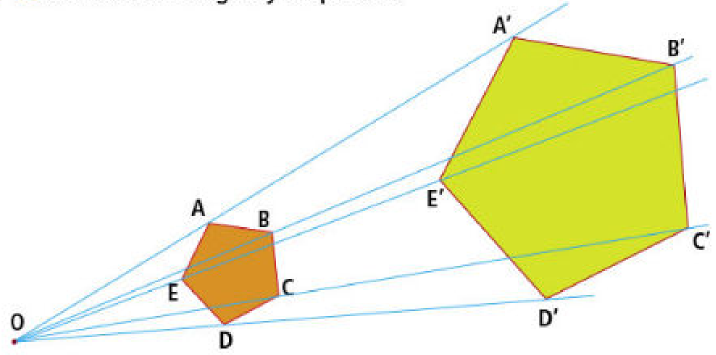
e) Elaboren lo siguiente y respondan.

Fijen la linterna a 1.5 m del papel bond sobre la pared, acerquen y alejen la estrella. Vuelvan a la posición inicial de los objetos. Midan la distancia del segmento $\overline{AB}$, luego de $\overline{A'B'}$. Marquen la sombra sobre el papel para verificar sus dimensiones.

- ¿Qué medidas tienen los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$? ______________________________
- Escriban la razón de semejanza $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$. ______________________________
- Anoten la razón de semejanza entre las distancias de la lámpara a la sombra, y la de la lámpara a la estrella. ______________________________
- ¿Cómo son entre sí las dos medidas anteriores? ______________________________

◆ Comenten: ¿se pierden las proporciones si alejan *x* cantidad de metros la linterna?

Actividad 18. Analiza la imagen y responde.



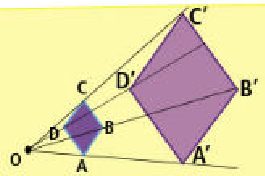
a) Mide los segmentos que se piden en la siguiente tabla. Determina la razón entre segmentos correspondientes y responde las preguntas.

Longitud		Razón	Distancia		Razón
$\overline{A'B'}$ =	$\overline{AB}$ =	$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ =	$\overline{OA'}$ =	$\overline{OA}$ =	$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ =
$\overline{B'C'}$ =	$\overline{BC}$ =	$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$ =	$\overline{OB'}$ =	$\overline{OB}$ =	$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$ =
$\overline{C'D'}$ =	$\overline{CD}$ =	$\frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}$ =	$\overline{OC'}$ =	$\overline{OC}$ =	$\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}$ =

- ¿Qué deduces cuando relacionas las razones de las longitudes con las razones de las distancias? ______________________________
- ¿Cómo son, entre sí, las medidas de los ángulos interiores del pentágono **ABCDE** respecto a las medidas de los ángulos interiores del pentágono **A′B′C′D′E′**? ______________________________

◆ Lee la información del siguiente recuadro y comenta con tus compañeros si lo que hicieron con la lámpara cumple con la definición de *homotecia*.

Formalización. La **homotecia** es una transformación en el plano que amplía o reduce el tamaño de una figura conservando la medida de los ángulos y manteniendo constante la razón de los lados. Para efectuar una homotecia es necesario conocer el punto respecto al cual se va a llevar a acabo, **centro de homotecia** (**O**), así como la **razón de homotecia** (*k*), la cual determina el tamaño de la figura resultante.



$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OD'}}{\overline{OD}} = k$$

$$\measuredangle A' = \measuredangle A,\ \measuredangle B' = \measuredangle B,\ \measuredangle C' = \measuredangle C,\ \measuredangle D' = \measuredangle D$$

Consolido mis competencias

Actividad 19. Regresa a la actividad inicial del billete de $100.00 y responde.

a) Coloca, en la imagen de Nezahualcóyotl en marca de agua, el punto **A** en el ojo izquierdo, el **B** en la punta de la nariz y el **C** en la punta de la barba; y en la imagen de Nezahualcóyotl coloca el punto **A'** en el ojo izquierdo, el **B'** en la punta de la nariz y el **C'** en la punta de la barba.

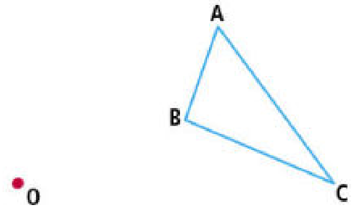
b) Traza los triángulos **ABC** y **A'B'C'**, y une con una línea recta cada par de puntos **A** y **A'**, **B** y **B'**, **C** y **C'**. Denota con **O** al punto donde se intersequen y responde.

- Escribe la razón de semejanza entre las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos. ____________________
- Anota la razón de semejanza entre las distancias de los triángulos. ____________________
- Menciona las parejas de ángulos correspondientes que son iguales. ____________________
- ¿Cuál es la razón de semejanza entre la marca de agua y la imagen original? ____________________

◆ **Comenta con un compañero tu conclusión. Para saber si una imagen es homotética a otra, ¿qué condiciones debe cumplir? Escriban sus argumentos en su cuaderno.**

Actividad 20. Trabaja en parejas y respondan lo siguiente.

a) Utilicen el punto **O** como centro de homotecia. Tracen, con sus escuadras, una recta que inicie en **O** y pase por el punto **A**, prolónguenla a una distancia igual al segmento $\overline{OA}$ para ubicar el punto **A'**; hagan lo mismo con los puntos **B** y **C** para encontrar **B'** y **C'**. Después, unan los tres puntos obtenidos para formar el triángulo **A'B'C'**.



- ¿Qué relación existe entre la medida del segmento $\overline{A'B'}$ con $\overline{AB}$, $\overline{B'C'}$ con $\overline{BC}$ y $\overline{A'D'}$ con $\overline{AD}$? ____________________
- ¿Cómo son, entre sí, las medidas de los ángulos correspondientes entre las dos figuras? ____________________ ¿Cuál es la razón de homotecia k? ____________________

b) Obtengan el perímetro de ambas figuras y escriban qué relación encuentran entre los resultados. ____________________

c) Calculen el área de ambas figuras y escriban qué relación encuentran entre los resultados. ____________________

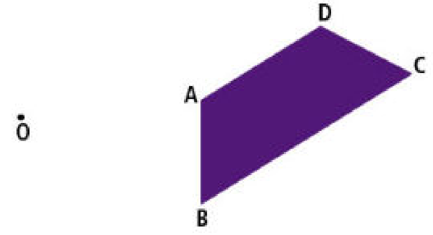
d) Escriban, en su cuaderno, qué características varían o se conservan en una homotecia.

◆ **Comenten las respuestas con sus compañeros, ¿el valor de k influye en el tipo de homotecia que se obtendrá? ¿Puede haber una homotecia con valor k negativo? ¿Hay homotecias con valor k fraccionario?**

Formalización. La razón entre las áreas de dos figuras homotéticas es el **cuadrado** de la razón de homotecia. Si $k = 2$, el área de la figura homotética es de $2^2 = 4$.

Actividad 21. Organízate en equipos y lleven a cabo lo siguiente en su cuaderno.

a) Calquen, al centro de una hoja blanca, la siguiente figura y el centro de homotecia (**O**).

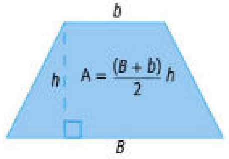


b) Tracen los segmentos $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$ y $\overline{DO}$, prolónguenlos a la izquierda y a la misma distancia entre la figura y el punto **O**. Ubiquen los puntos **A'**, **B'**, **C'** y **D'**. Unan los puntos para formar el trapecio **A'B'C'D'**.

c) Midan las magnitudes de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ del trapecio original; hagan lo mismo con los segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ y $\overline{A'D'}$ del trapecio homotético y respondan en la siguiente página.

Recuerda

La fórmula para calcular el área de un trapecio es



- ¿Cómo son, entre sí, las medidas de los lados correspondientes entre los trapecios? ¿Y las medidas de los ángulos correspondientes entre las dos figuras? Coméntenlo y escriban sus conclusiones.

____

____

- Calculen el perímetro de ambas figuras. ______________________________
- Determinen el área de ambos trapecios. ______________________________
- ¿Qué posición tiene el trapecio **A′B′C′D′** respecto al trapecio **ABCD**?

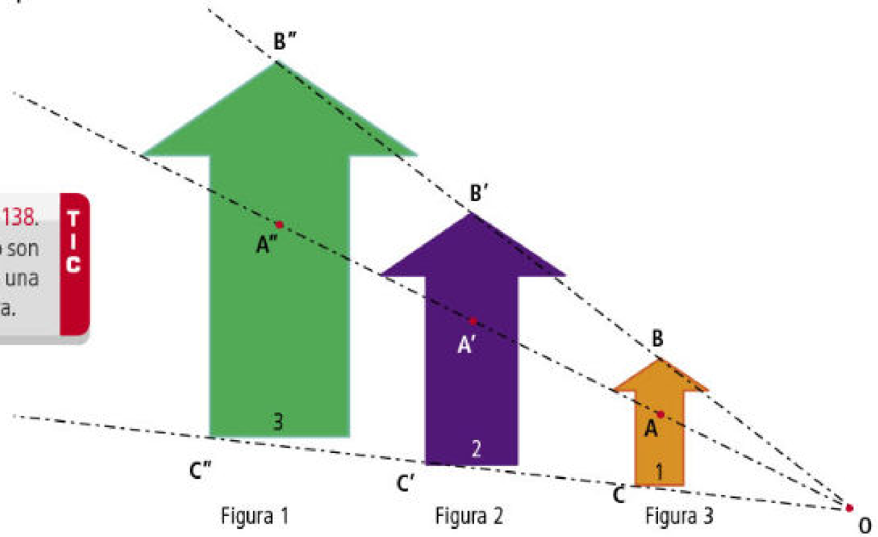
____

- ¿Cuál es la razón de homotecia *k* del trapecio **ABCD** con el trapecio **A′B′C′D′**? ________

◆ **Comenten qué relación encuentran entre los perímetros y las áreas de ambas figuras. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.**

Formalización. Cuando la razón de homotecia (k) es positiva se le denomina **directa** y los puntos homotéticos están a un mismo lado del centro de homotecia (**O**). Cuando la razón de homotecia es negativa se llama **inversa**, y los puntos homotéticos se encuentran en distinto lado del centro de homotecia (**O**).

Actividad 22. Analiza, en parejas, la siguiente composición de homotecias con un mismo centro y respondan.



TIC Visita www.redir.mx/matfort3-138. Explica en tu cuaderno cómo son las figuras que resultan de una razón de homotecia negativa.

a) ¿Cuál es la razón de homotecia de la figura 2 respecto a la 1? ______________

b) ¿Cuál es la razón de homotecia de la figura 3 respecto a la 2? ______________

c) ¿Cuál es la razón de homotecia de la figura 3 respecto a la 1? ______________

d) Si el segmento $\overline{\mathbf{BC}}$ mide 2 cm, ¿cuánto mide el segmento $\overline{\mathbf{B'C'}}$? ______________

¿Cuánto mide el segmento $\overline{\mathbf{B''C''}}$? ______________

e) ¿Qué relación encuentran entre la razón de homotecia de la figura 2 con la 1, y la figura 3 con la 2, respecto al resultado de la razón de homotecia de la figura 3 con la 1?

____

____

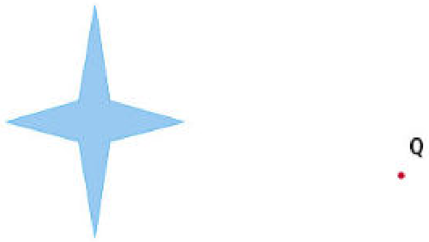
Formalización. La **composición de homotecias** del mismo centro es otra homotecia con el mismo centro y cuya razón de homotecia es el producto de las razones.

$$k_3 = (k_2)\,(k_1)$$

Actividad 23. Calca las figuras al centro de una hoja blanca. Traza las figuras homotéticas correspondientes respecto al centro de homotecia y la razón que se indica.

a) $k = -2$

b) $k = \frac{1}{2}$



◆ **Reflexiona sobre las siguientes preguntas y escribe tus conclusiones en tu cuaderno. Compara tus resultados con los de un compañero.**

- ¿Qué sucede con la figura homotética cuando se le aplica una razón de homotecia negativa?
- ¿Qué ocurre cuando se le aplica una razón de homotecia entera positiva?
- ¿Y cuando se le aplica una razón de homotecia fraccionaria?

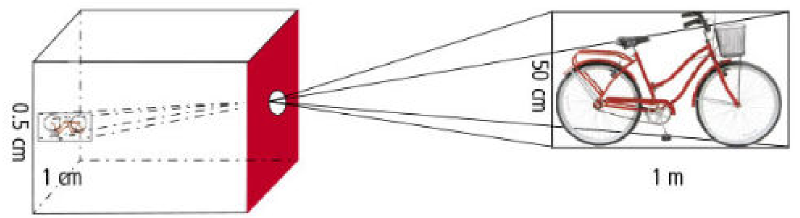
Consolido mis competencias

Actividad 24. Aplica lo que estudiaste en las actividades anteriores y resuelve.

a) Las **matrioskas** son unas muñecas tradicionales rusas creadas en 1890. Su originalidad consiste en que están huecas por dentro, de manera que en su interior se encuentra una nueva muñeca, y en ésta a su vez hay otra en un número variable.
¿Cuál es la razón de homotecia de la muñeca **G** en relación con la muñeca **A**? ______

b) La cámara oscura (o caja negra) es un instrumento óptico que permite obtener una proyección plana de una imagen externa sobre la zona interior de su superficie. Consiste en una caja cerrada y un pequeño agujero por el que entra una pequeña cantidad de luz que proyecta la imagen del exterior en la pared opuesta.

A partir de las dimensiones de la imagen proyectada en la caja negra, respecto a las dimensiones de la real y a la forma invertida en la que aparece, ¿cuál es la razón de homotecia entre la figura original con la figura homotética? ______



¿Sabías que...
la caja negra constituyó uno de los dispositivos ancestrales que condujeron al desarrollo de la fotografía?

◆ Comenta las respuestas con tus compañeros. Acuerda con tu profesor la posibilidad de construir, por equipos, una caja negra; pidan asesorías con el profesor de Ciencias con énfasis en Física.

3.5 Gráficas de funciones cuadráticas

Leo y construyo gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

Cálculo mental

a) $y = x^2 + 5x$; $x = 3$, $y =$ ______

b) $y = x^2 + \frac{x}{2}$; $x = 8$, $y =$ ______

c) $y = 5x^2 + \frac{x}{5}$, $x = 9$, $y =$ ______

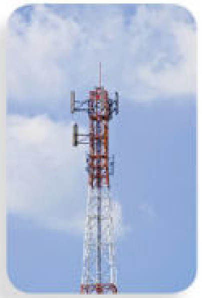
d) $y = 10x^2 + x$, $x = 7$, $y =$ ______

Activo mis competencias

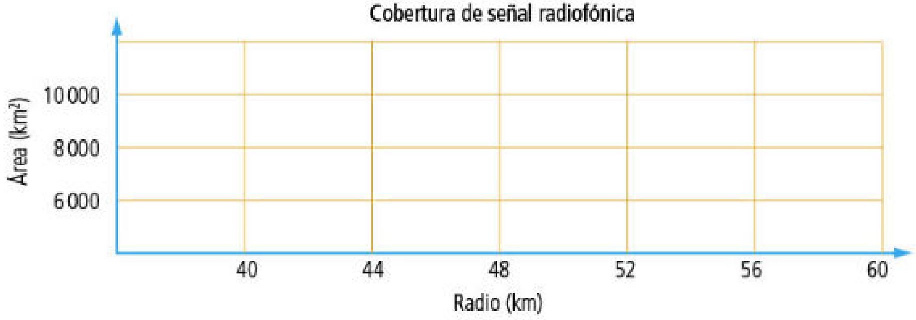
Durante el último lustro, la estación de radio Caxcán, 98.1 FM, aumentó 10% la potencia de su señal anual. Su cobertura de tipo radial ha cambiado desde que empezaron sus emisiones en 2009.

a) Completa la siguiente tabla que muestra estas variaciones.

Año	Cobertura	
	Radio (km)	Área (km²)
2009	40	
2010	44	
2011		
2012	53.24	
2013		10 774.87



b) Grafica los puntos y responde, según la información de la tabla.



- Escribe la expresión algebraica que representa el fenómeno. ______
- Tras leer los datos de la gráfica y la tabla, ¿cuál fue el aumento del área de cobertura aproximada en los cinco años de crecimiento del radio de cobertura? ______

◆ Comenta con tus compañeros de grupo qué procedimiento utilizaste para llegar a esta conclusión. Compara tu expresión algebraica con la que obtuvieron tus compañeros.

Consolido mis competencias

Actividad 25. Reúnete en parejas; analicen y respondan.

Galileo Galilei llevó a cabo numerosos experimentos en los que dejaba rodar bolas en un plano inclinado. Probó que la distancia recorrida por un cuerpo que experimenta una aceleración constante y parte del reposo es proporcional al cuadrado del tiempo durante el que está cayendo.

En la actualidad, el experimento se puede hacer con instrumentos de mayor precisión, con éstos se mide la posición del objeto en fracciones de segundo.

Nota histórica

Galileo Galilei (1564-1642)
Empezó sus estudios de medicina en la Universidad de Pisa a los 17 años de edad. Después decidió estudiar matemáticas bajo la tutela del matemático M. Ricci; a los 25 años de edad obtuvo la cátedra de matemáticas en Pisa.

Investiga qué otros descubrimientos notables se le atribuyen a este científico.

a) Analicen la gráfica y respondan.

- ¿Qué significa el punto (0, 0) en la gráfica? ______

______

- ¿En qué segundo, el objeto llevaba un metro de distancia recorrido? ______

b) Expliquen, en su cuaderno, qué opción muestra el comportamiento de un objeto en caída libre.

- El objeto lleva una velocidad constante, recorre distancias iguales en tiempos iguales.
- El objeto se va acelerando, por lo que recorre distancias mayores conforme avanza el tiempo.
- El objeto se va desacelerando, por lo que las distancias son más breves conforme avanza el tiempo.

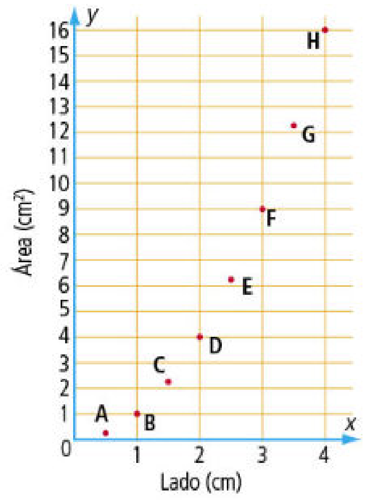
c) La aceleración en caída libre es 9.80 m/s^2, ¿cuál es la función que representa la gráfica anterior? ______

◆ **Comparen sus respuestas con las de sus compañeros; concluyan quién propone los mejores argumentos en su explicación.**

Consolido mis competencias

Actividad 26. Traza la línea que une los puntos y responde.

En la gráfica se muestran los puntos que indican la relación entre el crecimiento del lado de un cuadrado y su área.



TIC: Entra a www.redir.mx/matfort3-143, utiliza el laboratorio de caída libre y responde. ¿Cuáles son las variables que generan la gráfica? ¿Qué factor es el que hace que cambie la forma de la gráfica?

a) ¿Hay algún cuadrado que se ubique en las coordenadas (0, 0)? ______ ¿Por qué sucede esto? ______

b) ¿Cuál es el área del cuadrado cuando su lado mide 1.5 cm? ______

c) ¿Cuánto mide el lado cuando la figura tiene un área de 6.25 cm^2? ______

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona el área del cuadrado en función del tamaño del lado? ______

e) Completa la tabla.

Lado (cm)	0.5	1.7	2.5	5.8	9.9	11.3	15.7
Área (cm^2)							

◆ **Comparte y analiza con el grupo tus respuestas y procedimientos utilizados; observen la relación que se da entre *x* y *y*, así como la relación entre la gráfica y la ecuación. Verifiquen que los resultados obtenidos se corresponden con la relación de dependencia entre el área del cuadrado y la medida de su lado.**

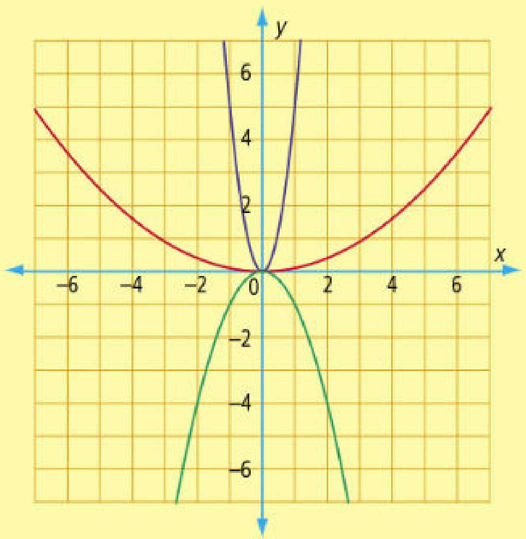
◆ Lee con atención la información de la siguiente página y coméntala con un compañero.

Consolido mis competencias

Formalización. Las gráficas que corresponden a las expresiones del tipo $y = ax^2 + bx + c$ son curvas llamadas **parábolas**.

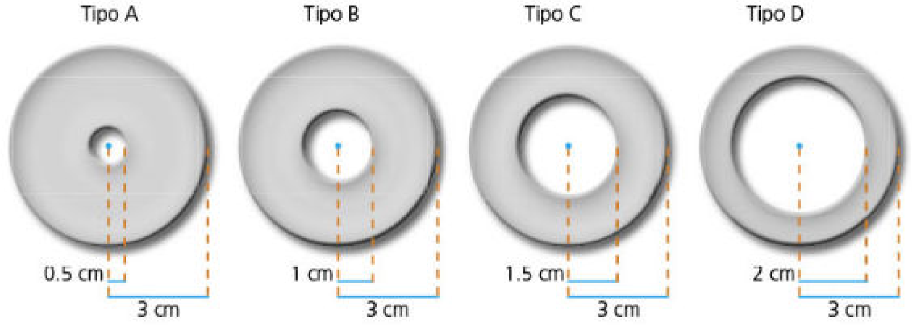
El coeficiente a en la ecuación general hace que la parábola sea **más amplia** (curva roja, $y = \frac{x^2}{10}$) o **más estrecha** (curva morada, $y = 5x^2$) o esté **girada hacia abajo** (curva verde, $y = -x^2$), si tiene signo negativo.

En el ejemplo, los **vértices** se ubican en el punto (0, 0), y el eje y queda como su eje de simetría.



Actividad 27. **Organízate en parejas. Analicen las situaciones y respondan.**

En una fábrica de productos para fijación, soporte y anclaje se hacen rondanas de tipo industrial como las que se muestran. Esta familia de rondanas tienen en común el mismo radio y lo que varía es el tamaño de los centros.



a) Completen la tabla.

Rondana	Radio del centro (cm)	Área de la rondana (cm²)
Tipo A	0.5	
Tipo B		
Tipo C		
Tipo D		

- ¿Cómo obtuvieron el área de cada rondana? Expliquen su procedimiento. ______

______

______

- ¿El área de la rondana con radio del centro igual a 2 cm es la mitad del área de la rondana con radio del centro igual a 1? ______ ¿Por qué sucede esto? ______

______

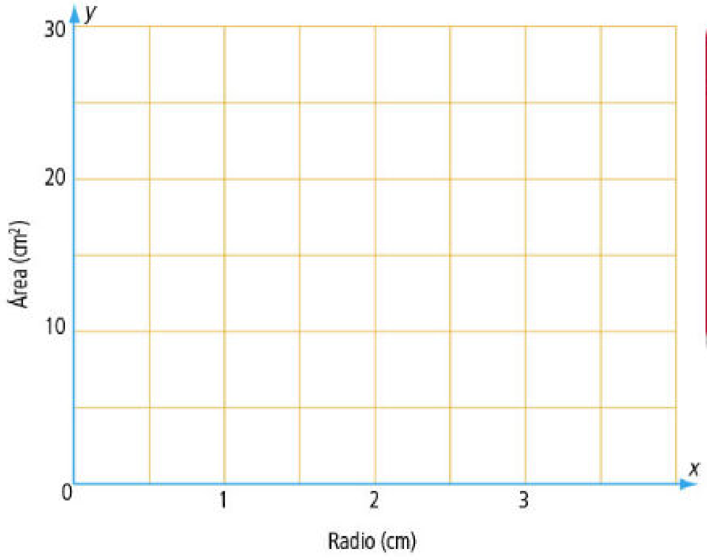
______

b) ¿Cómo se expresa el área de la rondana tipo A, en función de la medida del radio (r)?

______

c) Grafiquen los valores de la tabla.

d) Localicen más puntos que cumplan con la función que escribieron en el inciso b).



TIC Entra a www.redir.mx/matfort3-145 y explora los controladores. Responde: ¿qué sucede con la gráfica de una parábola si...

$a > 0$ o $a < 0$,
$b > 0$ o $b < 0$,
$c < 0$ o $c > 0$?

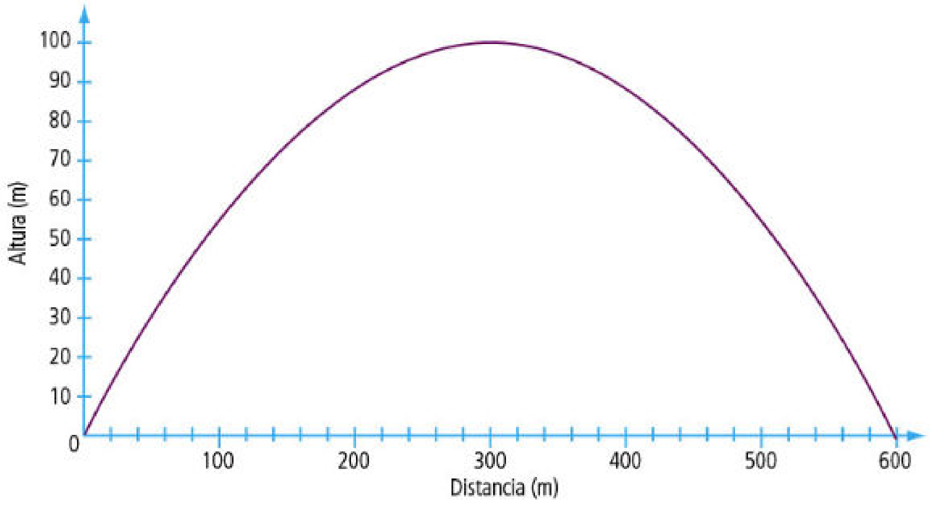
Escribe tus conclusiones en el cuaderno.

◆ **Comenten, con el grupo, si los puntos están alineados y expliquen en su cuaderno por qué sucede esto.**

Consolido mis competencias

Actividad 28. Analiza, en equipo, la siguiente situación y resuelvan.

Una compañía estudia el funcionamiento de un aparato lanzador de bengalas de salvamento. Para esto, traza la trayectoria en un sistema de coordenadas en los que se pueden apreciar algunos puntos determinados por las distancias (eje horizontal) y las alturas (eje vertical).



a) ¿Cuál es el punto más alto que describe la trayectoria de la bengala? __________

b) Escriban las coordenadas del punto donde se ubica el vértice de la parábola. __________

c) Se presentaron las siguientes expresiones algebraicas para hacer el manual de instrucciones del lanzador. Subrayen la correcta.

$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1$ $\qquad y = 2x^2 - x$ $\qquad y = -\frac{1}{900}x^2 + \frac{2}{3}x$ $\qquad y = 300x^2$

d) Expliquen por qué la eligieron. __________

____

e) Utilicen la expresión que eligieron y completen la tabla.

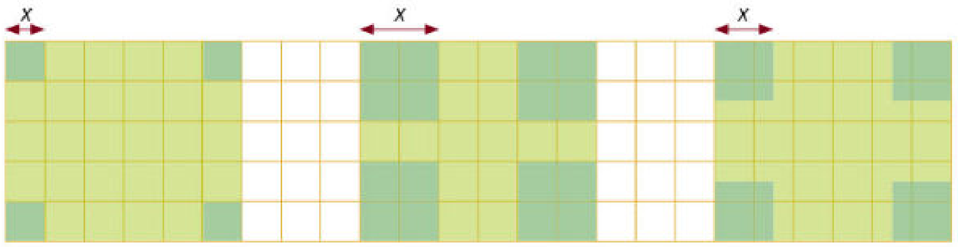
Distancia (m)	100		300	400	500	
Altura (m)		$\frac{800}{9}$	100			

◆ **Comparen sus argumentos del inciso d) con los de sus compañeros para elegir la expresión que representa el recorrido de la bengala.**

Consolido mis competencias

Actividad 29. Resuelve los problemas y construye las gráficas como se indica.

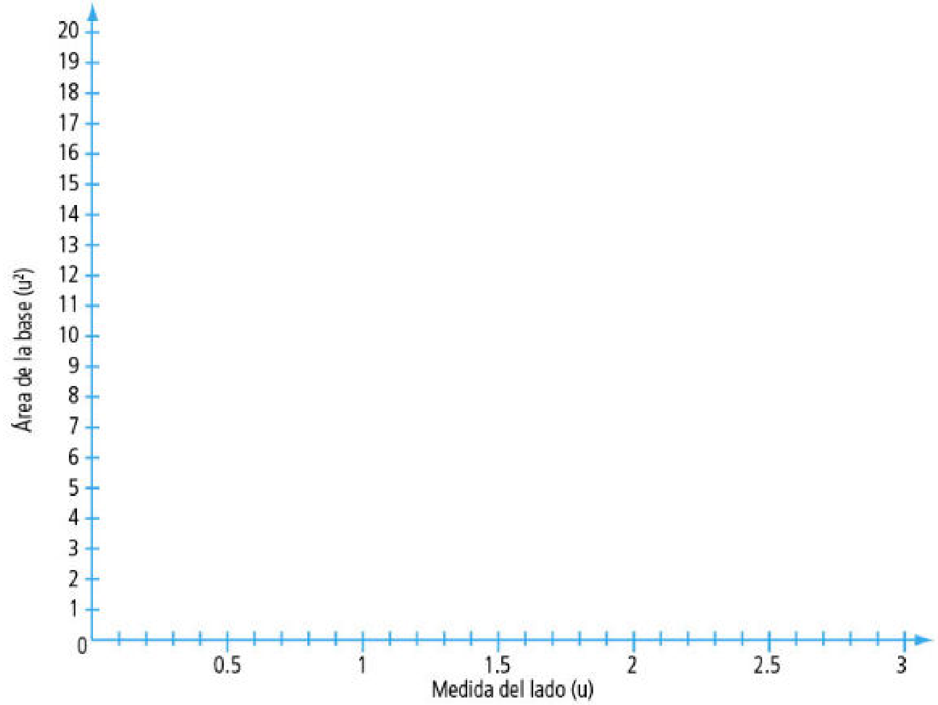
La empresa cartonera Apozol S. A. fabrica empaques para regalo sin tapa. El jefe de diseño necesita conocer cuál es la variación del área de la base del empaque en relación con la medida x, que representa el lado del recorte cuadrangular de cada modelo. En una reunión, eligió los planos que se muestran a continuación.



x = 1u $\qquad$ x = 2u $\qquad$ x = 1.5u

a) Completa la tabla y grafica los datos.

Valor (x)		1.15	1.35		1.7	1.85	2
Área (base de la caja)	12			6			2



b) Con base en los puntos marcados, ¿en qué valor de x se encuentra la base que ocupa el área máxima? ______

c) ¿Qué valor de x corresponde a la base que ocupa el área mínima? ______

d) ¿A qué se debe este fenómeno? ______

______

e) Escribe la función que relacione el corte cuadrangular que se hace para la construcción del empaque y el área que se obtiene de la base de la caja. Explica tu procedimiento.

______

______

______

______

◆ **Reúnete en pareja y comparen los procedimientos que llevaron a cabo para hallar la expresión del inciso e).**

Actividad 30. Resuelve; traza la gráfica en tu cuaderno.

a) Un escalador deja caer una roca desde un acantilado. Analiza los valores de la tabla y halla la expresión con la que se calcula la distancia (d) que recorre la piedra en cualquier segundo (t).

t(s)	d(ft)
0	0
1	16
2	64
3	144
4	256

▪ Expresión algebraica: ______

b) Explica tu procedimiento para hallar la expresión algebraica. ______

______

______

◆ **Comenta, con el grupo, otros fenómenos que se puedan analizar mediante el estudio de una parábola.**

◆ **Regresa al problema de la sección "Activo mis competencias" y compara ese procedimiento con los del resto de las actividades. Determina, en grupo, cuáles de éstos son más eficientes.**

3.6 Gráficas por secciones rectas y curvas

Leo y construyo gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

Cálculo mental

a) $\frac{3}{4}$ de 750 m ______

b) 0.5 de 5 km ______

c) $\frac{2}{8}$ de 500 l ______

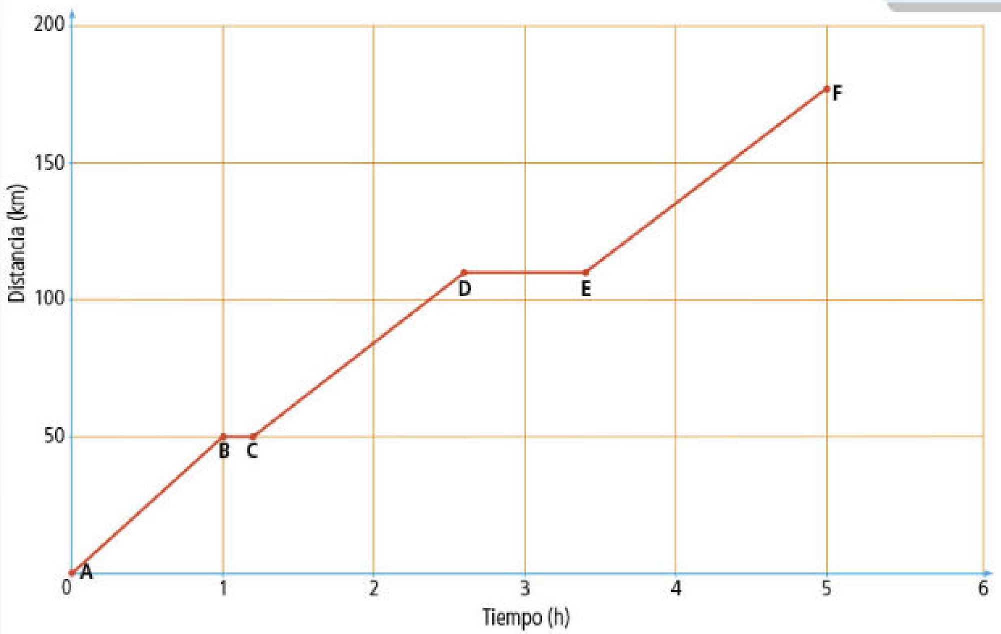
d) $\frac{3}{2}$ de 50 m ______

e) $\frac{1}{4}$ de 300 km ______

Activo mis competencias

Analiza la gráfica y responde.

La gráfica representa la distancia recorrida por una camioneta de mensajería. Cada letra indica un local que deberá visitar.



a) ¿Qué distancia total recorre la camioneta? ______

b) ¿Cuánto tiempo emplea la camioneta en visitar los seis lugares? ______

c) ¿Entre qué lugares permaneció más tiempo estacionada? ______

d) ¿Entre qué puntos se encuentra el tramo más largo del recorrido? ______

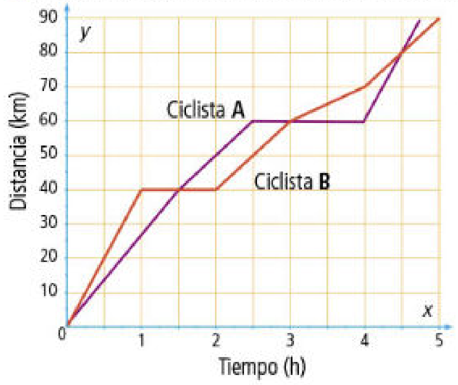
e) ¿Cuál es la velocidad promedio del punto E al F? ______

◆ **Comenta con un compañero tus respuestas. Consideren que el chofer se demora 30 min a su llegada al punto D. ¿Cómo se modifica la gráfica?**

Consolido mis competencias

Actividad 31. Responde a partir de la gráfica.

a) Analiza la gráfica que describe el recorrido de dos ciclistas y responde.

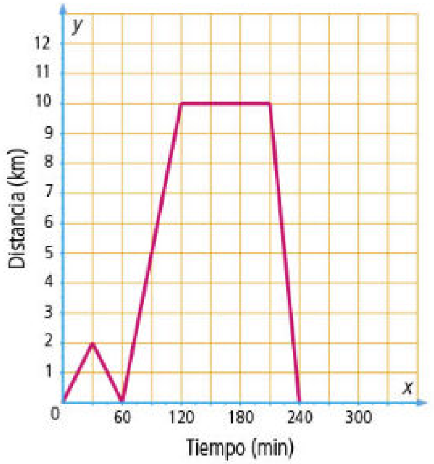


- ¿Cuántos kilómetros recorre el ciclista **A**? ______
- ¿Cuántos kilómetros recorre el ciclista **B**? ______
- ¿Qué ciclista ha ido más rápido? ______
- ¿Se encuentran en algún momento? ______

  Explica. ______

- ¿Quién descansó más tiempo? Explica. ______

b) Orlando salió de su casa para ir al cine. Empezó a caminar a las diez de la mañana, después de andar un rato, regresó por su patineta.



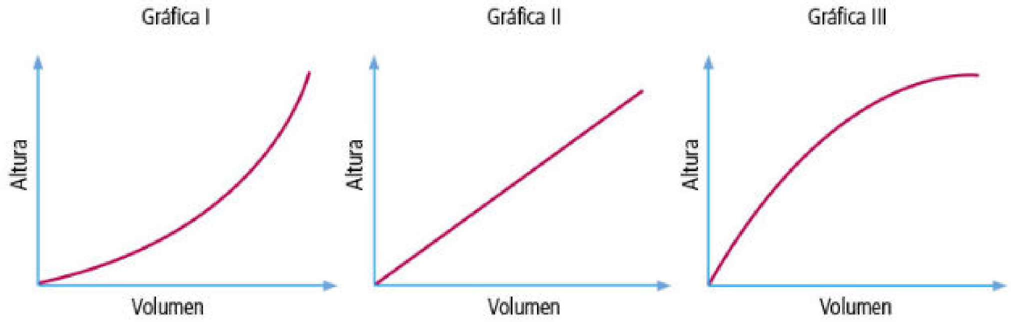
- ¿Cuántos kilómetros recorrió a pie? ______
- ¿Cuánto tiempo tardó? ______
- ¿A qué hora recogió la patineta en su casa? ______
- ¿Cuántos kilómetros recorrió en patineta? ______
- ¿Cuánto tiempo empleó? ______
- En patineta, ¿cuánto tiempo hizo Orlando en el viaje de ida y vuelta? ______
- ¿Cuánto tiempo estuvo en el cine? ______

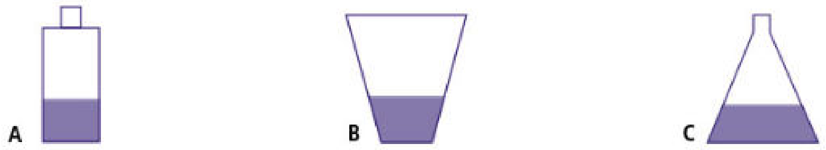
◆ **Compara tus respuestas con las de tus compañeros de grupo. Haz una gráfica por secciones; considera el recorrido y tiempo aproximado que necesitas para ir de tu casa a la escuela. Compara tu trabajo con el de un compañero.**

Consolido mis competencias

Actividad 32. Analiza cada caso y considera un flujo de agua constante.

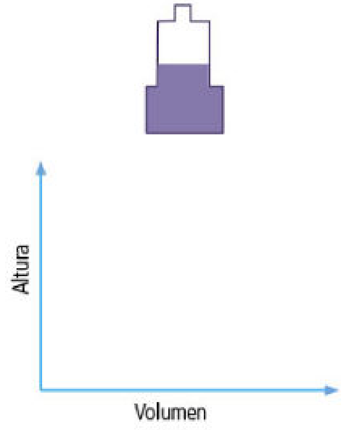
a) Asigna para cada recipiente la gráfica que represente el llenado.

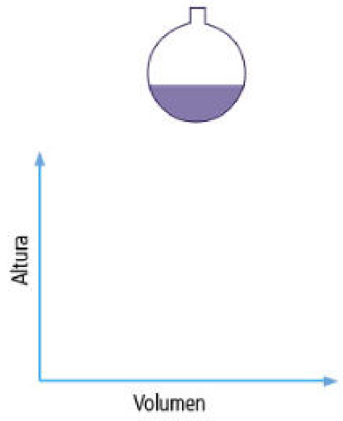




- ¿Qué gráfica representa el llenado del recipiente **A**? ______
- ¿Cuál le corresponde al llenado del recipiente **B**? ______
- ¿Y para el recipiente **C**? ______

b) Esboza la gráfica que represente el llenado de los recipientes.



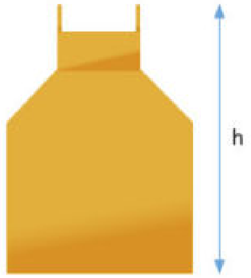


◆ **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten en qué se fijaron para decidir si la gráfica debe tener secciones curvas o rectas.**

Consolido mis competencias

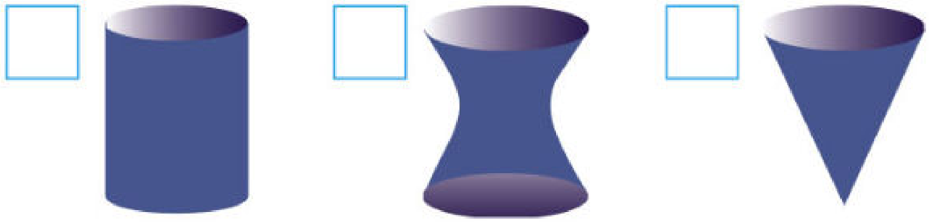
Actividad 33. **Traza, en parejas, la gráfica que describa de la mejor manera cada situación descrita. En cada caso, marquen los ejes, la escala y sus unidades.**

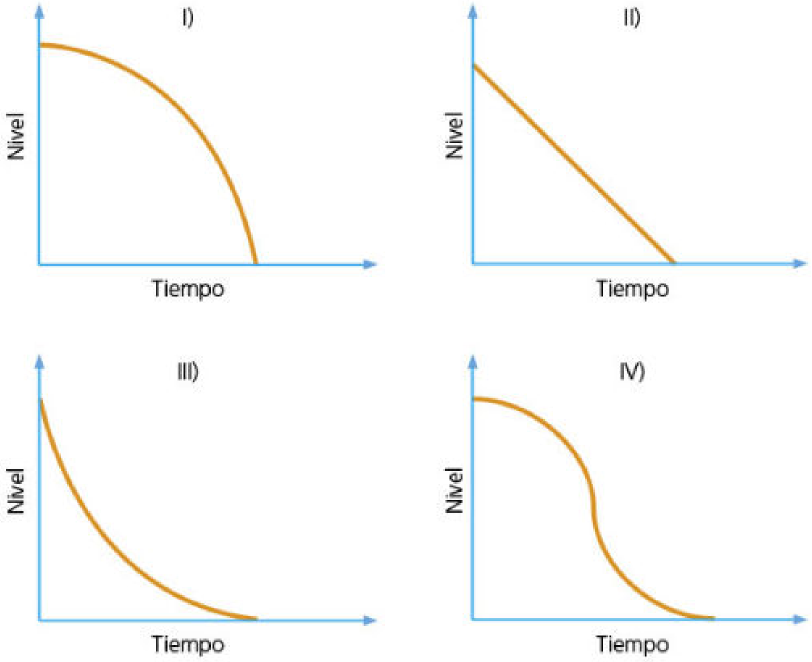
a) La altura que alcanza un líquido en el siguiente recipiente respecto al tiempo, al tener un flujo constante de agua.



b) Raúl salió a dar un paseo en bicicleta. Pedaleó durante dos horas y recorrió 30 km; hizo una parada de media hora, volvió a pedalear durante una hora y cuarto y avanzó 15 km; descansó tres cuartos de hora e inmediatamente regresó a su casa, que estaba también a 15 km. Tardó solamente un par de horas en regresar a su casa porque tomó un atajo.

c) Los siguientes depósitos están llenos con la misma cantidad de agua. Los tres tienen un desaguadero que arroja cinco litros por minuto de forma constante. Relacionen cada recipiente con su gráfica, señala la que sobra y justifiquen.





TIC Visita www.redir.mx/matfort3-153, primero traza la gráfica que representa el llenado de los recipientes y después verifica tu propuesta.

d) Describan una situación que se represente con la gráfica que no seleccionaste en el inciso anterior. ____

____

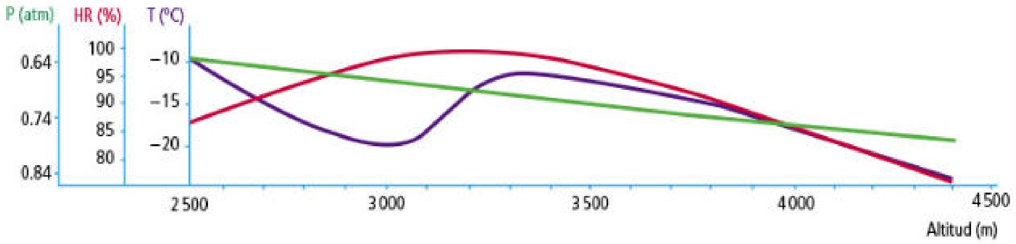
____

◆ **Comparen sus gráficas con las de sus compañeros. Intercambien opiniones acerca de cómo eligieron la escala, qué tipo de datos escribieron en cada eje o en qué se fijaron para decidir que la gráfica tendría secciones rectas o curvas.**

Consolido mis competencias

Actividad 34. Analiza la información, la gráfica y responde.

Para un estudio ambiental, un grupo de biólogos y alpinistas escalan una montaña escondida entre densas nubes. Durante el ascenso toman datos de la altitud, humedad relativa (HR), temperatura (T) y presión atmosférica (P), que se presentan en la gráfica.



a) ¿Cuál es la altura de la cima de la montaña? ______________________

b) ¿A qué altura iniciaron el ascenso? ______________________

c) En la cima de la montaña, el grupo observa un mar de nubes que queda justamente bajo sus pies. Cuando están entre éste no reciben el calor del sol y aumenta la humedad.

- ¿Cuál es la altura máxima del mar de nubes? ______________________

d) ¿Cuál es la temperatura máxima registrada? ______________________

¿A qué altitud se presenta? ______________________

e) ¿Cuál es la humedad relativa máxima registrada? ______________________

¿A qué altitud se presenta? ______________________

f) Completa la tabla. ¿Cuáles eran los valores de humedad relativa, presión y temperatura en el lugar de salida, a 3 000 m y en la cima?

	Humedad relativa	Presión	Temperatura
Lugar de salida			
A 3 000 m			
En la cima			

◆ Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten los diferentes procedimientos que llevaron a cabo.

3.7 Regla del producto

Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

Cálculo mental

a) $\frac{10}{50}$ = ______

b) $\frac{12}{48}$ = ______

c) $\frac{11}{33}$ = ______

d) $\frac{7}{56}$ = ______

Activo mis competencias

Lee la información y responde las preguntas. Para un sorteo semanal se tienen cinco urnas, en cada una hay bolitas numeradas del 0 al 9. De cada urna se extrae una bolita y se anota el dígito. Los cinco números se publican en el orden en el que aparecieron y éstos son los números ganadores.

Cada participante puede comprar un boleto, como el que se muestra, y debe seleccionar cinco dígitos.

Urna 1		Urna 2		Urna 3		Urna 4		Urna 5	
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	3	2	3	2	3	2	3	2	3
4	5	4	5	4	5	4	5	4	5
6	7	6	7	6	7	6	7	6	7
8	9	8	9	8	9	8	9	8	9

Para ganar es necesario tener correctos los cinco números de acuerdo con el orden en que salieron de las urnas.

a) ¿Conoces algún juego similar? Si es así, descríbelo. ______________________

b) ¿Cuál es la relación que existe entre las urnas y los resultados obtenidos? ______________________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en un boleto se obtengan los números correctos? ______

d) Explica el procedimiento que seguiste para determinarlo. ______________________

◆ Compara tus respuestas con las del grupo. Comenten si hay alguna diferencia entre seleccionar cinco números distintos (como 1, 3, 2, 7, 8) o repetir algún número. Discutan los procedimientos para determinar la probabilidad de tener el número ganador.

Consolido mis competencias

Actividad 35. Lee la información y responde.

Saúl y Beatriz juegan a ver quién puede anticipar el resultado de lanzar un dado y una perinola en la misma jugada.

a) Beatriz dice que seguramente ella ganará porque en la perinola obtendrá "toman todos" y en los dados, un número par. Saúl dice que él ganará porque sacará números nones en el dado y en la perinola la leyenda "pon 1 o pon 2", independientemente del número.

- Si los resultados coinciden con las predicciones, ¿quién tiene mayor probabilidad de ganar? ______
- Justifica tu respuesta. ______

b) Completa el cuadro con todos los resultados posibles del experimento aleatorio.

	1	2	3	4	5	6
Pon 1		(pon 1, 2)				
Pon 2						
Toma 1						
Toma 2						
Todos ponen				(todos ponen, 4)		
Toma todo	(toma todo, 1)					

- Escribe dos eventos independientes para el experimento. ______
- Indica la probabilidad de cada uno. ______
- Indica la probabilidad de que los dos eventos ocurran simultáneamente. ______

- Justifica tu respuesta. ______

c) Elabora un diagrama de árbol que se corresponda con este experimento aleatorio.

d) Describe cómo se usa el diagrama de árbol para calcular la probabilidad de que dos eventos ocurran simultáneamente. ______

◆ **Compara tus argumentos con los del grupo para determinar que los eventos son independientes y cómo calcularon la probabilidad de que ocurran simultáneamente.**

Consolido mis competencias

Actividad 36. Trabaja con un compañero, resuelvan los problemas.

a) Consideren el espacio muestral que trabajaron en la actividad anterior. Beatriz y Saúl decidieron seleccionar por columnas y filas el siguiente juego. Saúl eligió la fila "Todos Ponen" y la columna "5", y Beatriz escogió las columnas 1 y 6.

- Con esta combinación, ¿qué probabilidad tiene Saúl de ganar? ______
- ¿Y Beatriz? ______
- ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar? ______

b) Si la perinola cae en "toma todo", ¿quiere decir que el dado caerá en el 5? Justifiquen.

______

______

c) Respondan lo que se indica.

- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar simultáneamente una perinola y un dado se obtenga "pon 2" y 7? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que la perinola caiga en "toma todo"? ______
- ¿Y de que el dado caiga en 5? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar la perinola obtengan "toma todo" y el dado caiga en 5 (al mismo tiempo)? ______
- Justifiquen, en el cuaderno, cómo calcularon la última probabilidad.
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener "poner" en la perinola? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número primo con el dado? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que estos dos eventos ocurran simultáneamente? ______

◆ **Comparen sus respuestas con las del grupo. Discutan sus justificaciones y escriban una hipótesis sobre cómo se calcula la probabilidad de que dos eventos independientes ocurran simultáneamente.**

Consolido mis competencias

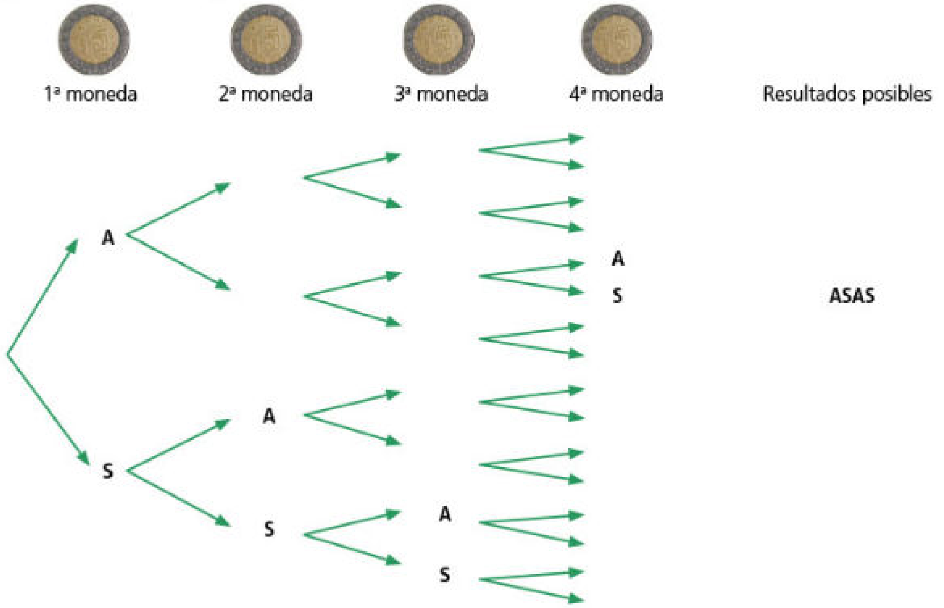
Actividad 37. Trabaja con un compañero. Hagan lo que se indica.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener sólo águilas al lanzar cuatro monedas? ______

b) Expliquen su procedimiento. ______

______

c) Completen el diagrama de árbol.



d) ¿En qué consiste el experimento aleatorio? ______

______

e) Escriban, en el cuaderno, dos eventos independientes para este experimento y calculen la probabilidad de que ocurran simultáneamente.

◆ **Comparen sus respuestas con las del grupo. Lean la información y discutan si las probabilidades que han calculado van de acuerdo con ella.**

Formalización. La probabilidad de que dos eventos independientes, **A** y **B**, ocurran de forma simultánea se calcula mediante el producto de la probabilidad de cada evento. Es decir:

$$P(A \text{ y } B) = P(A)P(B).$$

Consolido mis competencias

Actividad 38. Trabaja en equipo. Resuelvan lo que se indica.

a) En una evaluación de opción múltiple, Jaime no sabe las respuestas correctas de cuatro preguntas y las contestó al azar, cada pregunta tiene cuatro opciones de respuesta.

- ¿Cuál es la probabilidad de que responda bien en cada pregunta? __________
- ¿Qué probabilidad tiene de acertar las cuatro preguntas? __________
- Justifiquen su respuesta. __________

b) Al estrenarse una película, las últimas nueve personas que compraron boleto fueron mujeres.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente persona también sea mujer? __________
- ¿Cuál es la probabilidad de que tres hombres compren de manera consecutiva? Justifiquen su respuesta. __________

TIC

Entra a www.redir.mx/matfort3-160, explora el sitio y selecciona las actividades que te llamen la atención. Comenta tus experiencias con el grupo y discutan cómo les ayudó lo que han aprendido de probabilidad para llevar a cabo lo que se indica.

Actividad 39. Trabaja en equipo. Efectúen lo que se indica y respondan en el cuaderno.

a) En una urna cerrada se colocan tres canicas de color verde, cinco blancas y cuatro rojas. Se extrae una canica de la urna y se anota su color. Posteriormente se regresa la canica a la urna. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una canica verde y después una roja? La canica no se devuelve a la urna.

b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una canica verde tres veces seguidas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos canicas verdes seguidas de una roja y una blanca?

d) Expliquen sus procedimientos.

e) Si la canica que se extrae no se devuelve a la urna, ¿cómo cambian las probabilidades que calcularon? Escriban una conclusión.

◆ Comparen sus respuestas con las del grupo. Revisen sus respuestas a las actividades de la lección y comenten ventajas y desventajas de usar la regla del producto.

¿Qué tanto sé?

Selecciona la opción correcta.

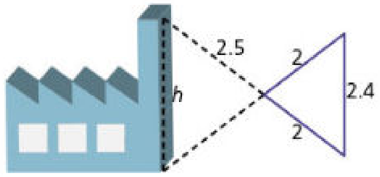
1. El producto de dos números consecutivos es 650. Si n representa al menor de los números, ¿qué ecuación (en su forma general) corresponde a esta situación y cuáles son sus soluciones?

a) $n^2 + n - 650 = 0$; $x_1 = 25$, $x_2 = 26$ b) $n^2 + n - 650 = 0$; $x_1 = 25$, $x_2 = -26$
c) $n^2 + n + 650 = 0$; $x_1 = -25$, $x_2 = 26$ d) $n^2 + n + 650 = 0$; $x_1 = -25$, $x_2 = -26$

2. El área de un triángulo es 465 cm² y su base mide dos centímetros más que el cuádruple de la altura. Si x representa la medida de la altura, ¿qué ecuación corresponde al planteamiento anterior y cuál es su solución?

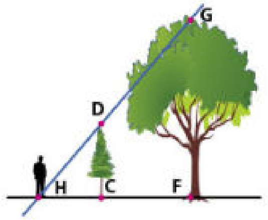
a) $x(4x + 2) = \frac{465}{2}$; $x = 15$ b) $x(4x + 2) = \frac{465}{2}$; $x = 62$
c) $x(4x + 2) = 465(2)$; $x = 15$ d) $x(4x + 2) = 465(2)$; $x = 62$

3. ¿Cuánto mide la altura (h) de la fábrica?



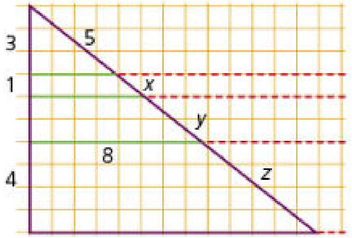
a) 2.8 unidades b) 2.9 unidades
c) 3 unidades d) 3.1 unidades

4. Observa la imagen de la derecha. Considera que el árbol pequeño mide 1.96 m, y está a 1.2 m y a 3.6 m de distancia de la persona y del árbol grande, respectivamente. ¿Qué altura tiene el árbol grande?



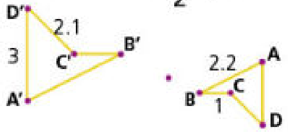
a) 7.84 m b) 5.88 m
c) 4.80 m d) 3.92 m

5. En la figura de la derecha, las rectas punteadas son paralelas. ¿Cuánto miden los segmentos x, y, z?



a) x: $\frac{5}{3}$; y: $\frac{10}{3}$; z: $\frac{20}{3}$
b) x: $\frac{5}{4}$; y: $\frac{10}{4}$; z: $\frac{20}{4}$
c) x: $\frac{4}{3}$; y: $\frac{8}{3}$; z: $\frac{16}{3}$
d) x: $\frac{7}{5}$; y: $\frac{14}{5}$; z: $\frac{28}{5}$

6. El cuadrilátero **A'B'C'D'** es homotético al **ABCD** con razón de homotecia $-\frac{3}{2}$. ¿Cuánto miden $\overline{A'B'}$ y $\overline{AD}$?



a) $\overline{A'B'}$: 1.5; $\overline{AD}$: 4.5 b) $\overline{A'B'}$: 2.3; $\overline{AD}$: 3.1
c) $\overline{A'B'}$: 3.3; $\overline{AD}$: 2 d) $\overline{A'B'}$: 3; $\overline{AD}$: 2.1

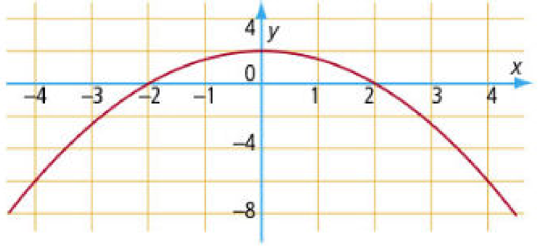
7. ¿Qué expresión algebraica corresponde a la gráfica de la derecha?

a) $y = -\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 2$

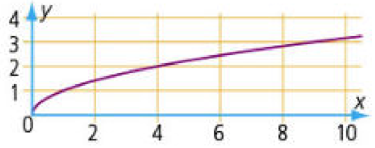
b) $y = -\frac{x^2}{2} + 2$

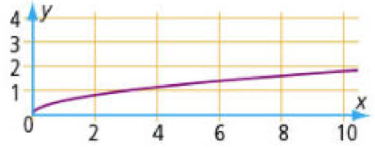
c) $y = -\frac{3x^2}{4} + \frac{x}{2} + 2$

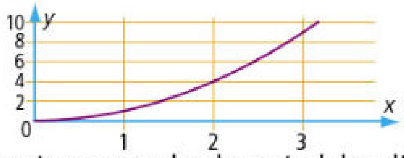
d) $y = -x^2 + x + 2$



8. ¿Qué gráfica muestra la relación entre el área de un círculo (y) y la medida de su radio (x)?

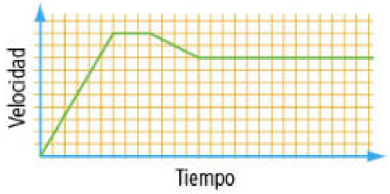
a)


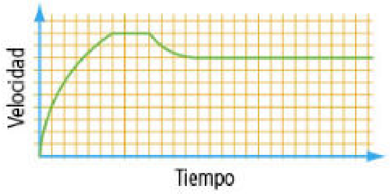
b)


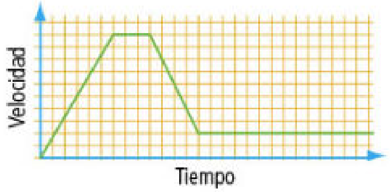
c)


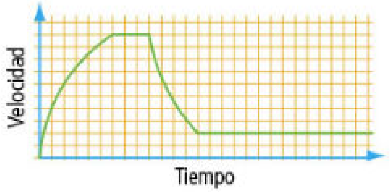
d)


9. Durante una prueba de control de calidad, un vehículo aceleró, de manera constante, para alcanzar su velocidad máxima y mantenerla durante algún tiempo; después desaceleró, de manera constante, hasta llegar a $\frac{4}{5}$ de su velocidad máxima y mantenerla hasta el final de la prueba. ¿Qué gráfica corresponde a la situación anterior?

a)


b)


c)


d)


10. Raúl tirará dos dados en un juego de mesa: uno hexaédrico (de seis caras) y uno octaédrico (de ocho caras). Si obtiene menos de 3 en cualquiera de los dados, perderá automáticamente el juego. ¿Qué probabilidad tiene de seguir jugando?

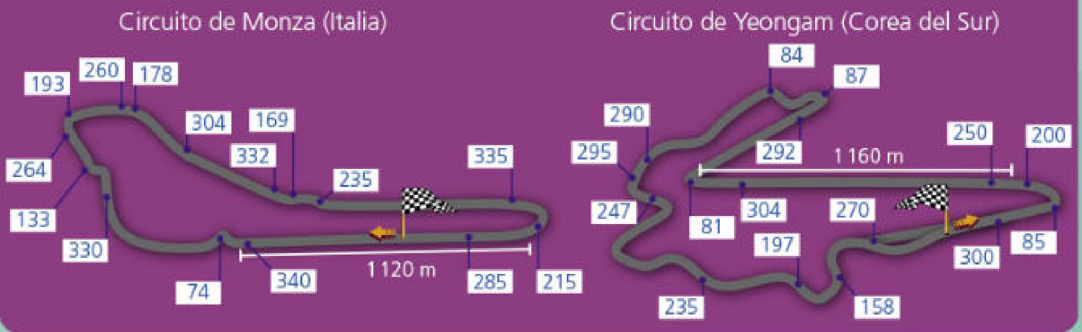
a) $\frac{4}{48}$ b) $\frac{24}{48}$ c) $\frac{28}{48}$ d) $\frac{44}{48}$

Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas con las del grupo y valídalas.

Desafío del bloque

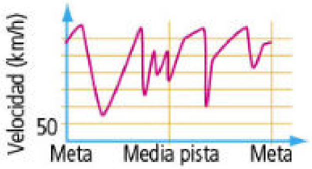
Pistas de carreras

Los siguientes diagramas muestran dos pistas famosas donde se efectúan carreras de automóviles. En cada una se muestra la velocidad, en kilómetros por hora, que se alcanza en algunos puntos, y la longitud, en metros, de la recta principal.



Pregunta 1

- ¿Qué gráfica muestra la velocidad de un vehículo durante una vuelta al circuito de Monza? Explica, en tu cuaderno, cómo la elegiste.



Pregunta 2

- ¿Qué significado tendría una gráfica que partiera del origen (0, 0)? ¿Por qué las gráficas anteriores están formadas por secciones curvas, en lugar de por segmentos de recta?

Pregunta 3

- Grafica, en tu cuaderno, la velocidad de un automóvil durante una vuelta al circuito de Yeongam.

Pregunta 4

- Durante una prueba en el circuito de Yeongam, un automóvil partió del reposo y recorrió la recta principal acelerando de manera constante hasta alcanzar, al final de la recta, una velocidad de 200 km/h. La distancia recorrida y el tiempo transcurrido se relacionan mediante la ecuación $d = 0.66t^2$, donde t se mide en segundos y d, en metros. ¿Cuánto tiempo tardó el vehículo en recorrer la recta?

Al terminar, efectúa la autoevaluación del bloque 3 en la página 247.

BLOQUE 4

Aprendizajes esperados

El estudiante:

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

No hay ninguna rama de las matemáticas, por más abstracta, que algún día no pueda ser aplicada a los fenómenos del mundo real.

Nikolay Lobachevsky

4.1 Sucesiones con regla general cuadrática

Obtengo una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

Cálculo mental

a) 12, 24, 48, ______

b) 4, 24, 144, ______

c) 9, 18, 36, ______

d) $\frac{15}{6}, \frac{45}{6}, \frac{135}{6}$, ______

e) $\frac{3}{3}, \frac{12}{3}, \frac{36}{3}$, ______

Activo mis competencias

Trabaja en equipo. Lean la información y respondan.

Observen la sucesión: 1, 9, 25, 49, 81, …

a) ¿Qué número sigue después del 81? ______

b) ¿Qué número es el octavo término de esta sucesión de números? ______

c) ¿Cuál es el término 100 de esta sucesión? ______

d) ¿El número 144 puede pertenecer a esta sucesión? Expliquen. ______

e) Den una expresión algebraica que les permita conocer el enésimo término de la sucesión. ______

f) Expliquen el procedimiento que siguieron con el fin de encontrar la expresión general para hallar el enésimo término de la sucesión. ______

- Comparen sus respuestas y procedimientos con los de sus compañeros. Digan en qué se fijaron para encontrar la expresión algebraica.
- Comenten, con el grupo, si se pueden obtener expresiones algebraicas distintas para hallar el enésimo término de una sucesión.

Recuerda

Una sucesión como

$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$

se compone de

a_1: primer término,
a_2: segundo término,

a_n: enésimo término.

Consolido mis competencias

Actividad 1. Analiza la sucesión de figuras y encuentra la expresión algebraica para determinar cualquier término (n) de la sucesión. Responde lo que se pide.

a)

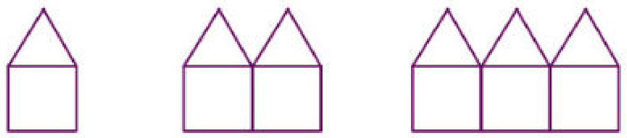


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

- ¿Cuántas líneas tiene la figura 1? __________
- ¿Cuántas líneas se agregan para formar la figura 2 a partir de la figura 1? __________
- ¿Y para formar la figura 3 a partir de la 2? __________
- Completa la tabla.

Número de figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	n
Cantidad de líneas	6	11										

- ¿Cuántas líneas tendrá la figura 20? __________ ¿Y la figura n? __________
- Explica, en tu cuaderno, tu procedimiento y verifica la expresión que obtuviste para encontrar el número de líneas de la figura n calculando los valores de la tabla.

◆ **Comenta con un compañero si dedujiste alguna expresión algebraica para hallar el término n y cómo lo hiciste.**

b)

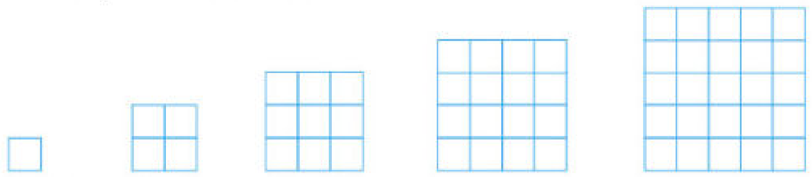


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

- ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura 6? __________
- Explica cómo lo dedujiste. __________
- Completa la tabla. La segunda fila indica cuántos cuadrados tiene la figura según el lugar que ocupa en la sucesión.

Número de figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	n
Cantidad de cuadrados	1	4										

- ¿Cómo se relaciona el lugar que ocupa la figura en la sucesión con el número de cuadrados que tiene? __________
- Escribe una expresión algebraica que permita conocer cualquier término de la sucesión. __________
- ¿En qué lugar estará la figura de 144 cuadros? __________
- ¿La sucesión tendrá una figura de 60 cuadros? Explícalo. __________
- Completa la tabla. Ahora tienes el número de cuadros y debes escribir qué lugar de la sucesión ocupa. Si es necesario, utiliza calculadora.

Número de figura						
Cantidad de cuadrados	49	225	484	1 296	2 500	50 625

- Explica qué procedimiento seguiste para completar la tabla anterior. __________

◆ **Compara tus respuestas con las del grupo; comenten los procedimientos que usaron, cómo obtuvieron la expresión general, si utilizaron las figuras, las tablas o ambas, y qué tabla fue más fácil de completar, la 1 o la 2.**

Actividad 2. Trabaja en pareja. Analicen las figuras, lean la información y respondan.

a)

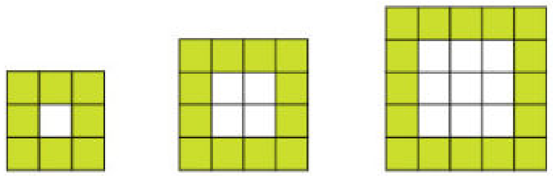


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

- Describan con qué operación sabrían rápidamente cuántos cuadrados, tanto verdes como blancos, tiene una figura, sin contarlos uno por uno. __________

Entra a www.redir.mx/matfort3-168, y resuelve los ejercicios de sucesiones cuadráticas. Revisa con un compañero los resultados que obtuviste.

TIC

- Si conocen el número de cuadrados totales de una figura y el número de cuadrados blancos, ¿cómo saben cuántos cuadrados verdes tiene? ____________________
- ¿Qué relación existe entre el número de la figura y el número de cuadrados blancos que tiene? ____________________
- ¿Qué relación guardan el número de la figura y el número de cuadrados que tiene de lado? ____________________
- Completen la tabla.

Número de figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	n
Cuadrados verdes	8	12										

- ¿Cuántos cuadrados verdes tendrá la figura 30? ____________________
- ¿Cuántos cuadrados verdes tendrá la figura n? ____________________
- Expliquen, en su cuaderno, su procedimiento y usen la expresión anterior para verificar los valores de la tabla.

b)

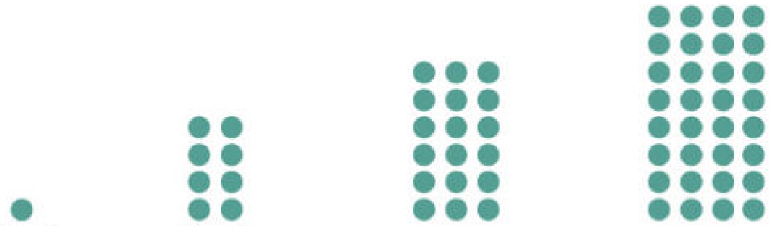


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

- ¿Qué relación guardan el número de puntos de la base y su lugar en la sucesión? ____________________
- ¿Cómo se relacionan el número de puntos de la base y el número de puntos de la altura? ____________________
- ¿Cómo se obtiene el número de puntos totales de cada figura? Justifíquenlo en su cuaderno.

- Completen la tabla. La segunda fila indica cuántos círculos tiene la figura según el lugar que ocupa en la sucesión.

Número de figura	1	2	3	4	5	8	9	10	n
Cantidad de círculos	1								

- Escriban una expresión algebraica con la que sea posible conocer el número total de puntos dependiendo del lugar que ocupe en la sucesión. ____________________

◆ **Compartan sus reflexiones sobre los procedimientos que utilizaron. ¿Qué relación existe entre las sucesiones de ambos incisos?**

c) Observen la sucesión de números: 3, 12, 27, 48, ...

- ¿Qué tienen en común los términos de la sucesión? ____________________
- ¿Qué número sigue después del 48? ____________________
- Escriban una expresión general con la que se pueda conocer cualquier término de la sucesión. ____________________

◆ **Hagan, en su cuaderno, los cálculos y de ser necesario apóyense en figuras o tablas como en los incisos a) y b). Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Compartan sus reflexiones sobre los diferentes procedimientos que utilizaron. ¿Qué relación existe entre las sucesiones de los tres incisos?**

◆ **Revisen, en grupo, la siguiente información; verifiquen si es cuadrática la expresión general que obtuvieron para la sucesión de la sección "Activo mis competencias".**

Formalización. Las sucesiones que has visto en esta lección se caracterizan porque sus términos se pueden obtener como el cuadrado de un número o el cuadrado de un número multiplicado por otro número. Ejemplos:

n^2, donde n toma valores 1, 2, 3, ... y se obtiene la sucesión 1, 4, 9, 16, ...

$2n^2$, donde n toma los valores 1, 2, 3, ... y se obtiene la sucesión 2, 8, 18, 32, ...

Para plantear una **expresión general** con la que sea posible conocer cualquier término de la sucesión, se pueden utilizar figuras o tablas que ayuden a encontrar la relación que existe entre el término de la sucesión y el lugar que ocupa.

Consolido mis competencias

Actividad 3. Completa la figura y la tabla asociada a cada sucesión cuadrática.

a) Consigue unos palillos y construye los siguientes términos de la sucesión.

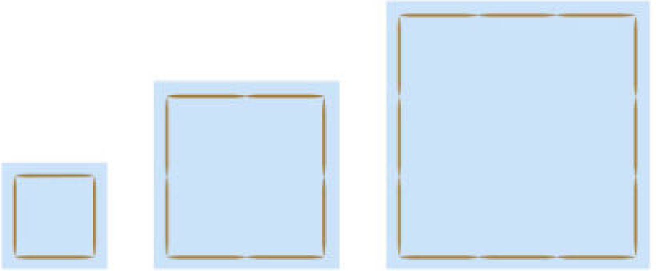


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Figura	1	2	3	4	5	10	n
Número de palillos							

b) Traza, en tu cuaderno, los cuadrados que se indican en la tabla.

c) Escribe la sucesión que indica el número de palillos utilizados en cada uno de los cuadrados.

4, 8, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ...

d) Escribe la expresión general con la que se pueda obtener cualquier término de la sucesión. ____________

e) Explica si se trata de una sucesión cuadrática. ____________

Nota histórica

Pitágoras y sus discípulos utilizaban piedritas o marcas para formar distintas figuras geométricas. Con éstas identificaban relaciones entre números y formas. Así descubrieron los números poligonales. Investiga acerca de estos números y cómo es su expresión general.

- Compara tus respuestas con las de algún compañero. Revisen los argumentos que escribió cada quien en el último inciso y concluyan cuáles son los más sólidos.
- Comenten de qué manera pueden formar una sucesión cuadrática a partir de la sucesión anterior. Escriban alguno de sus términos y deduzcan la expresión algebraica general para obtener cualquier término.
- Revisen la actividad 2 y comparen sus respuestas. ¿Se trata de la misma sucesión? Comenten, con el grupo, sus observaciones.

Para la próxima lección consigan: un pliego de cartoncillo u otro papel rígido, cinta adhesiva y una varilla de madera (5 mm de grosor, aproximadamente, y 30 cm de largo).

4.2 Sólidos de revolución

Analizo las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construyo desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

Cálculo mental

a) $\frac{10\pi}{2} =$ ____________

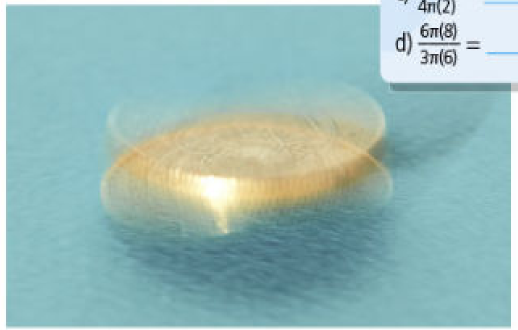
b) $\frac{3\pi(4)}{2\pi(3)} =$ ____________

c) $\frac{8\pi(2)}{4\pi(2)} =$ ____________

d) $\frac{6\pi(8)}{3\pi(6)} =$ ____________

Activo mis competencias

Observa las imágenes y responde.



a) ¿Qué cuerpo geométrico se percibe cuando una moneda está girando? ____________

b) ¿Qué otros cuerpos geométricos conoces que se formen al girar objetos? Menciona tres situaciones similares a la de la moneda. ____________

c) Observa, en la imagen, lo que se alcanza a ver cuando la moneda está a punto de caer. Anota tus conclusiones. ____________

- Comenta con un compañero de clase tus respuestas. Utiliza una moneda que tengas a la mano; hazla girar como en el ejemplo y comprueba tus respuestas.

Consolido mis competencias

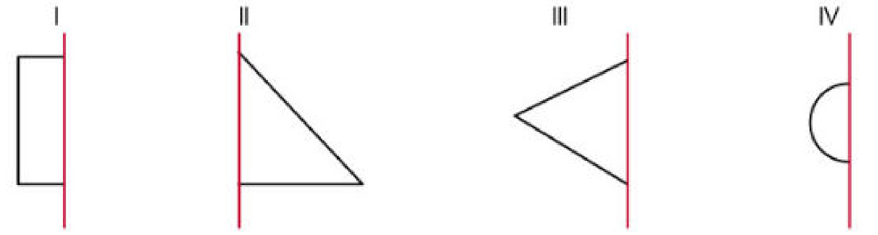
Actividad 4. Trabaja en parejas. Construyan los banderines con el siguiente material.

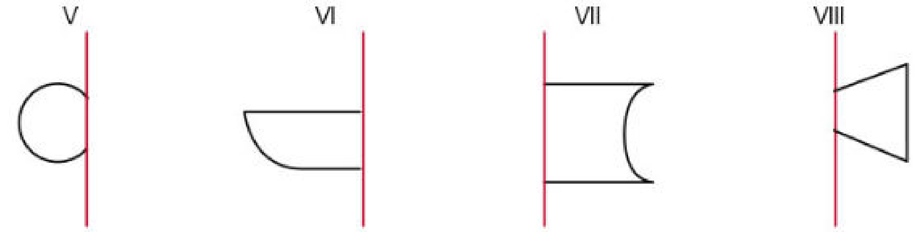
Material

- Pliego de cartoncillo u otro papel rígido
- Cinta adhesiva
- Varilla de madera (5 mm de grosor, aproximadamente, y 30 cm de largo)

Instrucciones

Elijan dos o tres banderines de los que se muestran abajo y elabórenlos. Consideren medidas aproximadas, peguen la figura en la varilla de madera con la cinta adhesiva. Al terminar, giren con las dos manos la varilla y escriban el cuerpo geométrico que se genera. Si no conocen el nombre, descríbanlo brevemente.



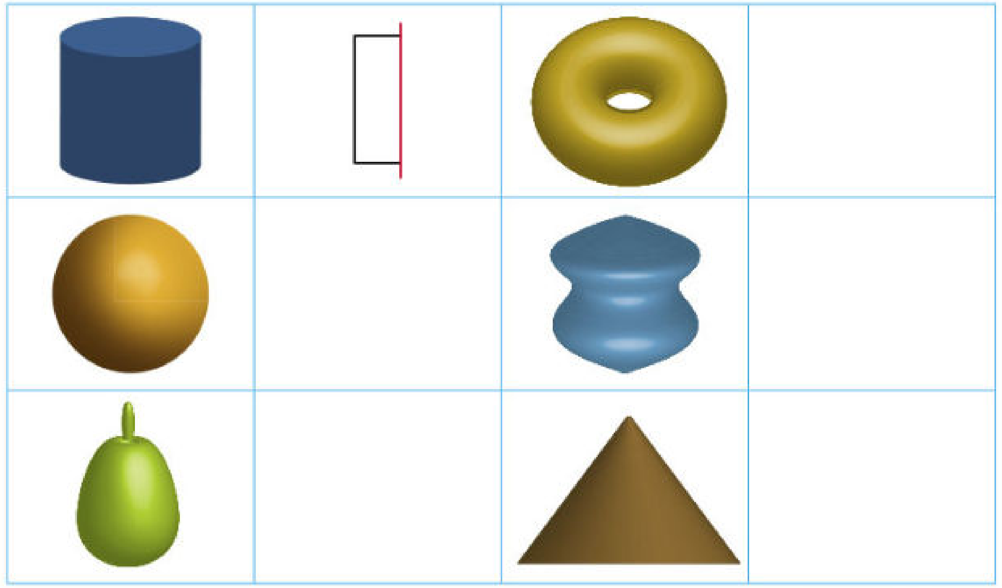


- Comparen sus descripciones con las de otras parejas y comenten las características que tienen en común. Esbocen, en su cuaderno, los cuerpos geométricos que se generan en cada caso; resalten con un color la curva (silueta) de cada uno.

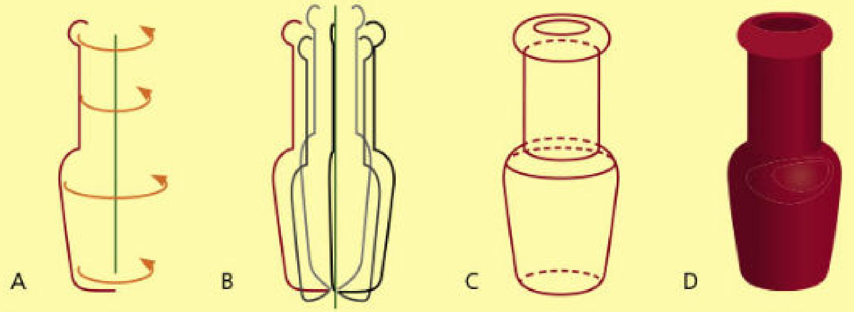
Consolido mis competencias

Actividad 5. Observa los siguientes cuerpos geométricos.

Dibuja la silueta de la forma geométrica que genera cada sólido al rotarla sobre su eje. Remárcala con color negro y el eje con rojo, como en el ejemplo.



Formalización. Los **sólidos de revolución** son cuerpos geométricos que se obtienen al girar una figura plana alrededor de un eje.



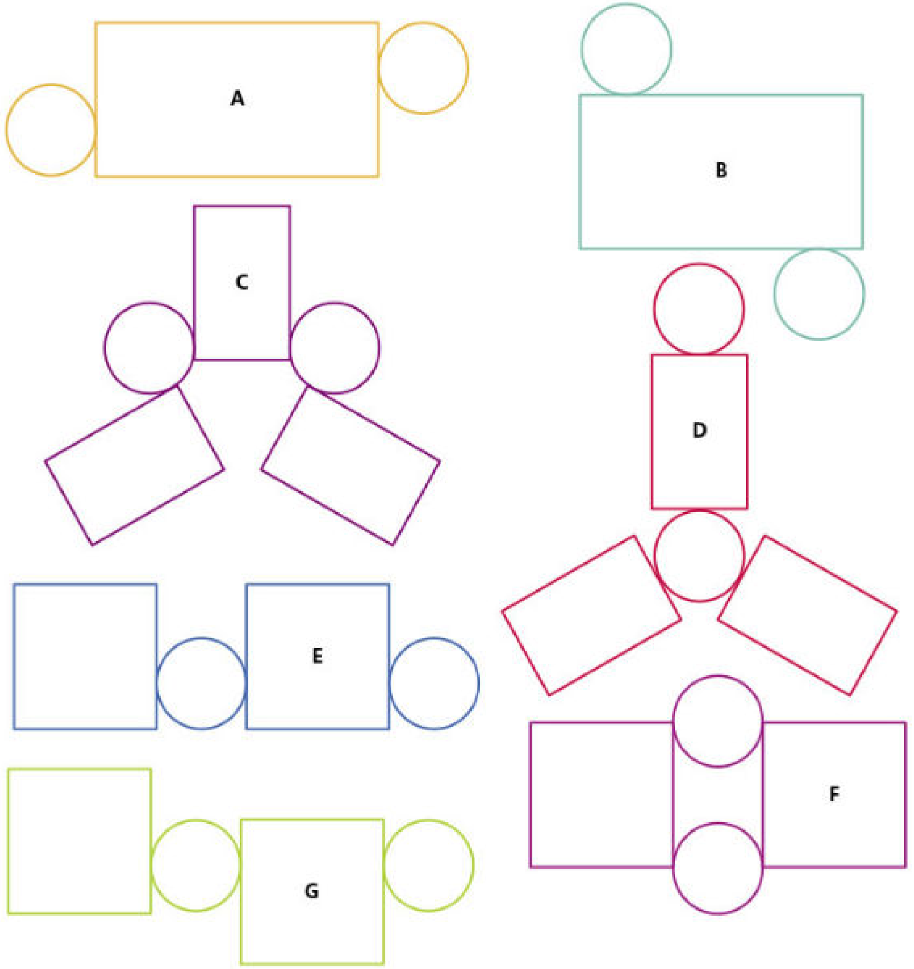
En la figura A, la línea roja que gira respecto al eje (verde) forma las paredes del envase y se le llama **generatriz**; en la figura B tiene un aspecto más de volumen; en la C y la D se muestra el recipiente, en diagrama y en modelo terminado, respectivamente.

- ¿Qué diferencia tienen un sólido de revolución y un poliedro? Coméntalo con un compañero. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Consolido mis competencias

Actividad 6. Resuelve individualmente.

Observa los desarrollos planos, ¿cuáles generan un cilindro? Marca aquellos que sí lo hacen. En caso de que tengas duda con alguno, reprodúcelo en una hoja, recórtalo y ármalo.



a) Escribe las letras que corresponden a desarrollos planos de un cilindro. __________

b) Identifica la generatriz en los que son desarrollos planos de un cilindro, remárcala con color azul y con rojo el radio.

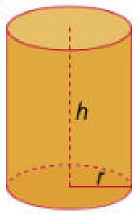
c) Explica por qué el desarrollo A no genera un cilindro. __________

d) Anota dos condiciones que debe cumplir el **desarrollo plano** de un cilindro. __________

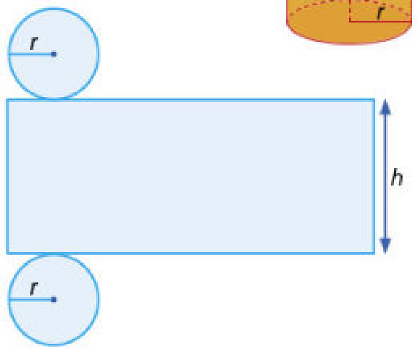
◆ **Observa las características que anotaste y compáralas con las de tus compañeros de grupo. Con ayuda del profesor, revisen sus respuestas y corrijan los posibles errores.**

Actividad 7. Haz los cálculos y responde.

a) Obtén las medidas del desarrollo plano de un cilindro para que al armarlo el diámetro mida 4 cm y la altura, 6 cm. Considera $\pi = 3.14$.



- ¿Qué datos necesitas para obtener las dimensiones del rectángulo?



Largo: __________

Altura: __________

- Calcula el perímetro del círculo que forman las tapas. __________

- Traza el desarrollo plano en tu cuaderno y ármalo.

b) Calcula las medidas de los desarrollos planos para los cilindros que se indican.

- Cilindro con radio = 3.5 y altura 20 cm

Largo: __________ Altura: __________

- Cilindro con radio = 2.5 y altura 19 cm

Largo: __________ Altura: __________

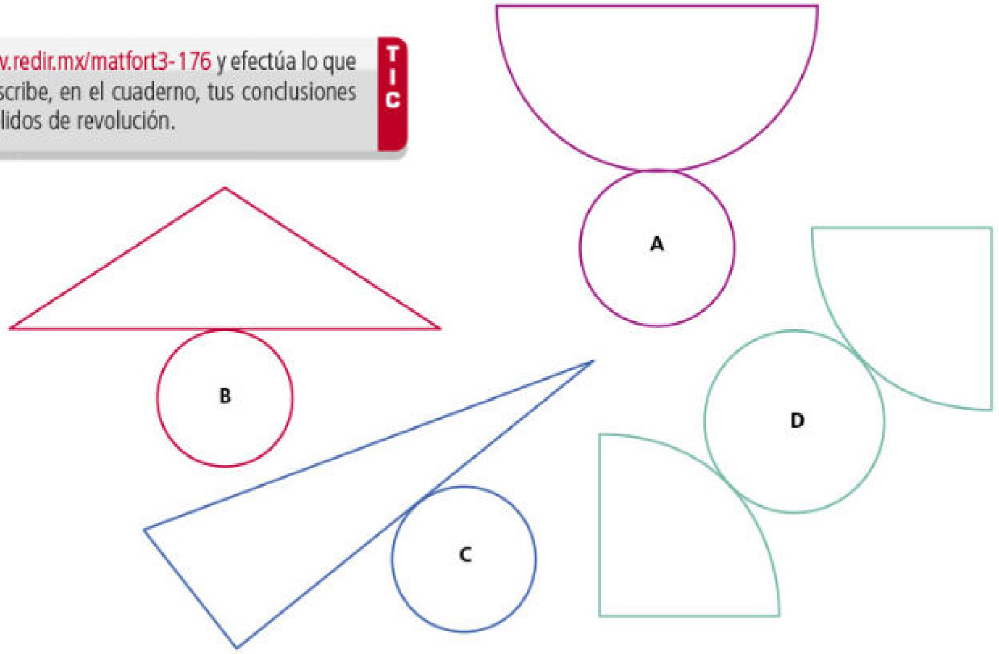
◆ **Compara tus respuestas con las de algún compañero y corrijan sus posibles errores. En parejas, calculen las medidas del desarrollo plano D, actividad 6. Consideren $r = 9$ cm y $h = 25$ cm. Escriban las medidas de los tres rectángulos.**

Consolido mis competencias

Actividad 8. Contesta de forma individual y sigue las instrucciones.

a) Observa los desarrollos planos. Marca aquellos con los que se pueda armar un cono. En caso de que tengas duda con alguno, reprodúcelo en una hoja, recórtalo y ármalo.

TIC Entra a www.redir.mx/matfort3-176 y efectúa lo que se indica. Escribe, en el cuaderno, tus conclusiones sobre los sólidos de revolución.



b) Escribe las letras que se corresponden con los desarrollos planos de un cono. ________

c) Remarca con color azul la generatriz en cada uno de los desarrollos correctos.

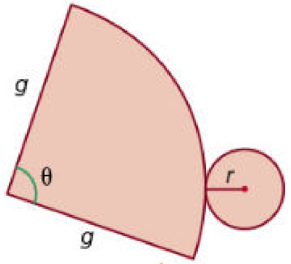
d) Explica por qué el desarrollo B no genera un cono. ________

e) Anota dos condiciones que debe cumplir un desarrollo plano para generar un cono.

◆ **Compara las características que anotaste con las del resto del grupo, observa en qué características se fijaron ellos. Con base en lo estudiado discutan ¿qué cuerpo geométrico se forma al girar un semicírculo? ¿Se podrá hacer un desarrollo plano de este cuerpo? Con la guía de su profesor logren una conclusión grupal.**

Consolido mis competencias

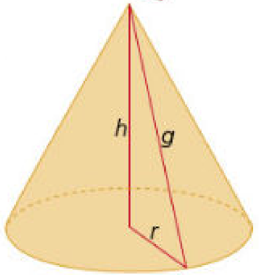
Actividad 9. Utiliza un cono de papel, similar a los que se utilizan para tomar agua, y responde.



a) Marca la circunferencia de la base del cono en una hoja blanca, con mucha precisión. También mide su radio y altura.

b) Córtalo por un costado y extiende el cono, calca la figura sobre la misma hoja blanca donde trazaste la circunferencia.

c) Observa la imagen del cono. ¿Cómo calcularías la generatriz (g) del cono si conoces el radio de la base (r) y la altura (h)? ________



- Longitud de g = ________

d) Observa la imagen del desarrollo plano del cono. Si se completara el sector circular a una circunferencia, ¿cómo calcularías su perímetro? ________

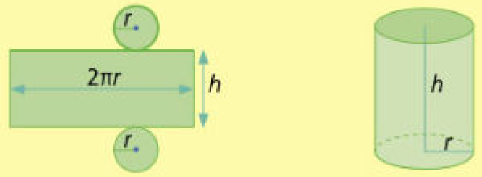
- Perímetro de la circunferencia con radio g = ________

e) En el desarrollo plano, ¿qué condición debe cumplir la longitud del sector circular del ángulo θ? ________

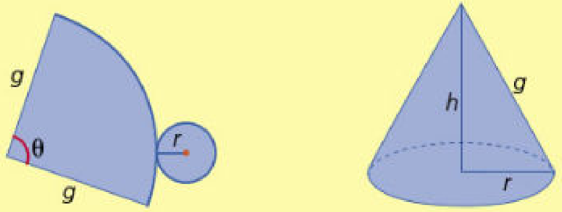
f) Con base en tu respuesta anterior, explica cómo calcularías la medida del ángulo del sector circular. ________

◆ **Comenta con tus compañeros el procedimiento que llevaron a cabo para obtener la respuesta en el inciso f). ¿Aplicaron proporciones? ¿Qué datos utilizaron para aplicar dicha proporción?**

Formalización. En el desarrollo plano de un **cilindro recto**, la base del rectángulo que forma la superficie lateral debe tener la misma longitud que las circunferencias de los círculos de las bases.



En el desarrollo plano de un **cono recto**, la longitud del sector circular debe ser igual a la de la circunferencia del círculo de la base.



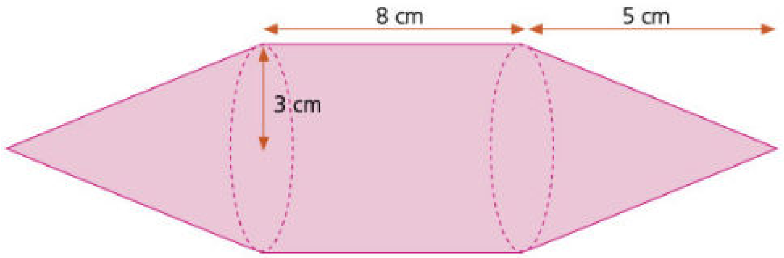
En el desarrollo plano de un cono con $r = 5$ y $h = 12$, la longitud de g se calcula mediante el teorema de Pitágoras $g^2 = r^2 + h^2$, $g = 13$.

Longitud de la circunferencia de radio g: $2\pi g = 2\pi(13) = 81.64$

Longitud de la circunferencia de radio r: $2\pi r = 2\pi(5) = 31.4$

Se utiliza la proporción: 81.64 es a 360°, como 31.4 es a θ; así $\theta \approx 138.46°$.

Actividad 10. Una heladera crea una presentación de cartón como la siguiente para empaquetar helado. Obtén las medidas necesarias para trazar el desarrollo plano que se imprimirá para su fabricación. Dibújalo en una hoja blanca y escribe sus medidas.



a) Escribe tu procedimiento en el cuaderno.

b) Construye el desarrollo plano y comprueba tus cálculos.

◆ Compara tu procedimiento con el de algún compañero. No olviden ponerle pestañas al desarrollo plano, para que al momento de armarlo sea más fácil ensamblar cada una de las piezas.

4.3 La pendiente

Analizo las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

Cálculo mental

a) $\frac{0.5}{5} = \frac{x}{4}$; $x =$ ____

b) $\frac{0.25}{10} = \frac{x}{2}$; $x =$ ____

c) $\frac{0.2}{3} = \frac{x}{6}$; $x =$ ____

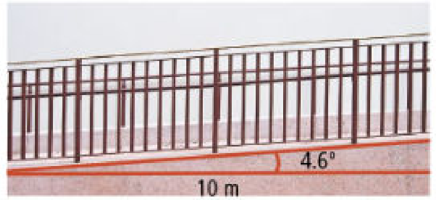
d) $\frac{1.5}{10} = \frac{4.5}{x}$; $x =$ ____

e) $\frac{4}{0.4} = \frac{8}{x}$; $x =$ ____

Activo mis competencias

En la secundaria Constitución de 1917, construirán rampas para personas que utilizan silla de ruedas. Al hacer la investigación acerca de sus dimensiones, los ingenieros encontraron un prototipo que se muestra a continuación.

Prototipo de rampa para acceso en silla de ruedas



a) Elaboren, en su cuaderno, un diagrama para representar la situación.

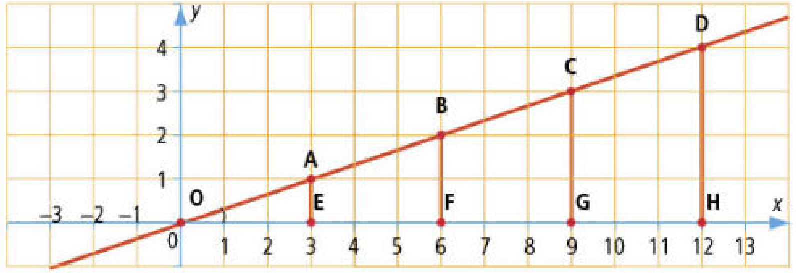
b) ¿Tendrá la misma pendiente (inclinación) una rampa cuyas medidas son 5.6 m de largo y 0.65 m de alto? ¿Por qué? ____

c) ¿Se conserva el ángulo de inclinación en ambas rampas? ____

◆ Comenta, en grupo, qué relación existe entre el largo, el alto y el **ángulo de inclinación** de una rampa.

Consolido mis competencias

Actividad 11. Analiza, en equipo, la gráfica, completen los valores en la tabla de la página siguiente y respondan.



a) ¿Qué función está representada por la línea recta? ____

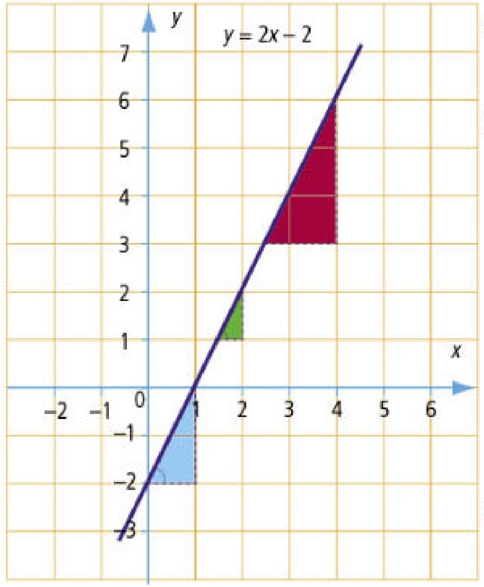
Triángulo	Cateto opuesto al ángulo O	Cateto adyacente al ángulo O	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$	Valor de la pendiente
OAE			$\frac{\overline{AE}}{\overline{OE}} =$	$\frac{1}{3}$
OBF		6		
OCG			$\frac{3}{9}$	
ODH	4			

b) ¿Qué regularidad observan en la columna que tiene el cociente $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$?

c) Analicen los valores de las dos últimas columnas. Escriban una conclusión al respecto en su cuaderno.

◆ **Comparen sus respuestas con las de los otros equipos y concluyan sobre la relación que existe entre el cociente de los catetos y el valor de la pendiente de una recta.**

Actividad 12. **Analiza, en parejas, la gráfica y respondan en el cuaderno.**



a) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta en la ecuación $y = 2x - 2$?

b) Calculen los cocientes.

Triángulo rojo: $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{3}{\square} =$

Triángulo verde: $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\square}{0.5} =$

Triángulo azul: $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\square}{\square} =$

c) ¿Qué relación existe entre el valor de la pendiente y el cociente de los catetos?

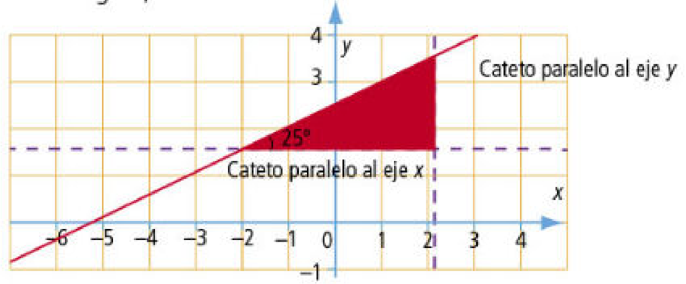
◆ **Comparen lo hecho por cada pareja; digan si existen más triángulos que cumplan con las características de los triángulos analizados y cómo se pueden construir.**

Consolido mis competencias

Actividad 13. **Haz, en equipos, lo que se indica y respondan.**

a) Tracen, en su cuaderno, un plano cartesiano y, en hojas blancas, tres triángulos rectángulos con los siguientes ángulos: 25°, 50° y 75°. No importan las medidas de sus lados.

b) Recorten y superpongan cada triángulo en cualquier lugar del plano cartesiano, pero de manera que los catetos sean paralelos a los ejes *x* y *y*. Tracen una recta que coincida con la hipotenusa del triángulo, como se muestra.



c) ¿Qué recta tiene menor pendiente? ______

d) ¿Cuál tiene mayor pendiente? ______

e) ¿Podrían trazar un triángulo, como los anteriores,con su hipotenusa paralela al eje *x*? ¿Por qué? ______

f) Calculen el valor aproximado de la pendiente para cada ángulo de inclinación.

∠25°: ______ ∠50°: ______ ∠75°: ______

g) ¿Cómo hicieron el cálculo de este valor? ______

◆ **Comenten, con el grupo, sus procedimientos y resultados. Analicen lo siguiente.**

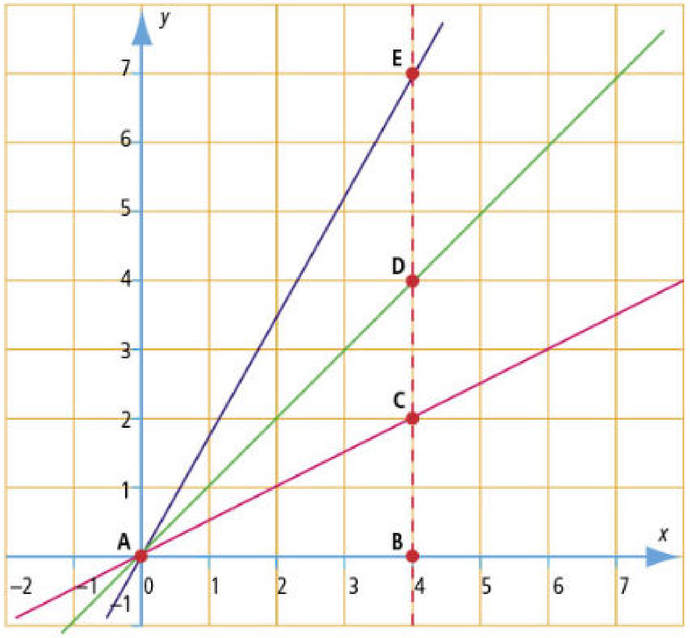
Formalización. El valor de la **pendiente** de una recta es igual al **cociente** que se obtiene al dividir el valor del **cateto opuesto** entre el **cateto adyacente** de un triángulo rectángulo cuyos catetos son paralelos a la abscisa y a la ordenada, respectivamente, y cuya hipotenusa coincide con la recta.

El valor de la **pendiente** de una recta también es el valor de inclinación de la misma y se llama **tangente** del **ángulo de inclinación**. Se calcula con el cociente de la medida del cateto opuesto entre la medida del cateto adyacente. En el ejemplo anterior se muestra que el ángulo de inclinación 25° tiene una tangente de 0.4663. Pendiente = tan (25°) = 0.4663.

Consolido mis competencias

Actividad 14. Organízate en parejas, analicen la gráfica y respondan.

TIC Entra a www.redir.mx/matfort3-182; utiliza la aplicación para dibujar, en tu cuaderno, diferentes rectas, marca su pendiente y escribe el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente.



a) ¿Qué tienen en común las tres rectas anteriores? ____________

b) Escribe los triángulos que se forman con los puntos **A**, **B**, **C**, **D**, **E**. ____________

c) ¿Qué tienen en común los triángulos anteriores? ____________

d) Calcula el valor de la tangente (tan) de cada triángulo. ____________

Actividad 15. Traza, en tu cuaderno, las rectas y calcula la tangente. Utiliza una calculadora y obtén el valor del ángulo de inclinación. Identifica en la calculadora la tecla $\tan^{-1}$.

a) $y = \frac{1}{2}x - 1$ b) $y = \frac{2}{3}x + 2$ c) $y = \frac{3}{4}x$

◆ Compara tus resultados con los de tus compañeros y, en grupo, determinen qué relación existe entre las medidas de los ángulos y el valor de la pendiente. Contrasten su conclusión con la respuesta que dieron en la sección "Activo mis competencias".

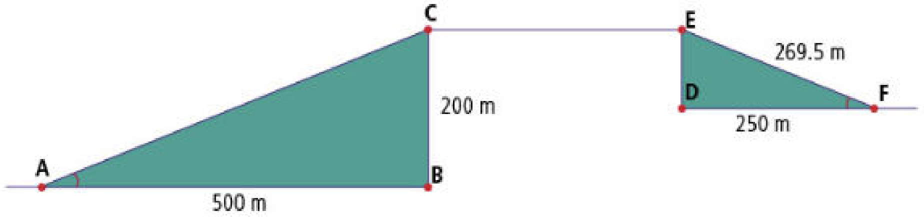
4.4 Razones trigonométricas

Analizo las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

Activo mis competencias

Analiza la información y responde.

En un tramo de la carretera federal 54 hay una elevación como la que se muestra.



Responde con base en las medidas de cada rampa.

a) ¿Cuál es la medida de los lados que faltan en el triángulo **ABC** y en el triángulo **FDE**? Lado $\overline{AC}$ = ______ Lado $\overline{DE}$ = ______

b) ¿Cómo es el cociente que forman estos lados?

Cociente del ángulo **A** = $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ = ______

Cociente del ángulo **F** = $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ = ______

c) ¿Qué nombre reciben los triángulos con estas características? ____________

d) ¿Qué tienen en común el par de triángulos de la imagen anterior? ____________

◆ Comenta, con el grupo, si hay alguna relación entre estos cocientes y el que calculaste en la lección anterior (la tangente).

Cálculo mental

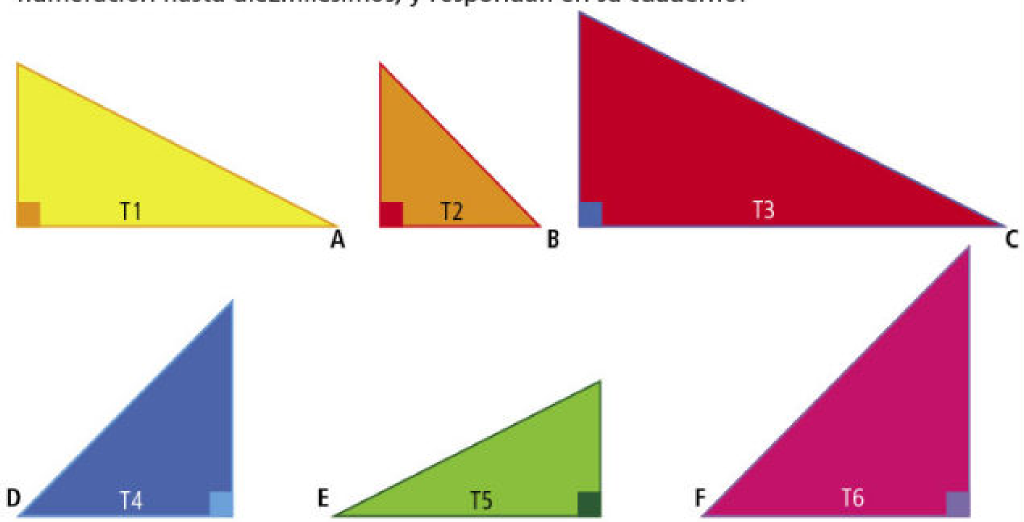
a) $8 \times 0.5 =$ ______
b) $12 \times 1.5 =$ ______
c) $24 \times 0.25 =$ ______
d) $20 \times 0.75 =$ ______
e) $40 \times 1.5 =$ ______

¿Sabías que...

se considera a Hiparco (190–120 a. C.), astrónomo y matemático griego, como uno de los estudiosos de la trigonometría? Investiga qué otras aportaciones se le adjudican.

Consolido mis competencias

Actividad 16. Trabaja en equipo. Completen la tabla con lo que se pide (utilicen numeración hasta diezmilésimos) y respondan en su cuaderno.



Triángulo	Medida				Cateto opuesto / hipotenusa	Cateto adyacente / hipotenusa
	Ángulo	Cateto opuesto al ángulo	Cateto adyacente al ángulo	Hipotenusa		
T1	A = 26.57°					
T2	B = 45°					
T3	C =	4	8			
T4	D = 45°					
T5	E = 26.57°					
T6	F =					

a) ¿Qué grupos de triángulos son semejantes?

b) ¿En qué se parecen las medidas de la tabla?

c) ¿Por qué sucede lo anterior?

◆ Analicen, con el grupo y con ayuda del profesor, los procedimientos que usaron en su equipo; pongan atención en los cocientes obtenidos y el ángulo de referencia.

Consolido mis competencias

Actividad 17. Trabaja en pareja. Aumenten al doble las medidas de los triángulos rectángulos de la actividad 16. Tomen como referencia el otro ángulo agudo (complementario) y completen la tabla. Respondan en el cuaderno.

Triángulo	Medida				Cateto opuesto / Hipotenusa	Cateto adyacente / Hipotenusa
	Ángulo	Cateto opuesto al ángulo	Cateto adyacente al ángulo	Hipotenusa		
T1		6				
T2	45°		6			
T3			16			
T4		8				
T5	63.43°				11.1802	
T6						

a) En los triángulos T1, T3 y T5, ¿cómo es el resultado del cociente $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ del ángulo complementario, y del cociente $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ de los ángulos complementarios, respectivamente?

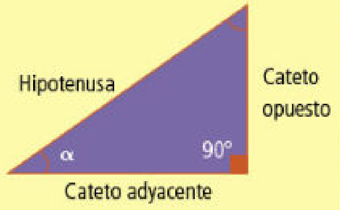
b) En los triángulos T2, T4 y T6, ¿cómo es el resultado del cociente $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ del ángulo complementario, y del cociente $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ de los ángulos complementarios, respectivamente?

◆ Analicen, con el grupo, por qué sucede lo anterior; comenten sus resultados y escriban una conclusión en su cuaderno.

Formalización. En un **triángulo rectángulo** los cocientes que calculaste en las actividades 16 y 17 se denominan **razones trigonométricas** y analizan la relación entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

Seno del ángulo α es el cociente de dividir el cateto opuesto entre la hipotenusa.

Coseno del ángulo α es el cociente de dividir el cateto adyacente entre la hipotenusa.



Tangente del ángulo α es el cociente de dividir el cateto opuesto entre el cateto adyacente.

Consolido mis competencias

Actividad 18. Reúnete en equipo; construyan y recorten varios triángulos rectángulos semejantes y con medidas distintas. Consideren como ángulo α el que mida 60°.

a) Una vez recortados, tomen el ángulo de 60° como referencia y efectúen los cálculos.

T1, sen(α) = ________ T2, sen(α) = ________ T3, sen(α) = ________

b) ¿Cuánto vale el seno del ángulo α en los diferentes triángulos? ¿Por qué? ________

____

c) ¿Cuánto vale el coseno del ángulo α en los diferentes triángulos? ________

◆ Escriban sus conclusiones en el cuaderno. ¿Qué determina que a pesar de las longitudes de los catetos, el seno y el coseno del ángulo α sea el mismo?

Actividad 19. Calcula las razones trigonométricas del triángulo y responde.

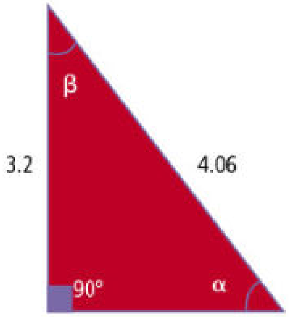
TIC Visita www.redir.mx/matfort3-186; observa las relaciones trigonométricas, por ejemplo, ¿qué sucede cuando los catetos son iguales o son la mitad de la hipotenusa?

sen(α) = ______ cos(α) = ______

sen(β) = ______ cos(β) = ______

a) ¿Qué resultado se obtiene al multiplicar sen(α) por sen(β)? ________

b) ¿Por qué? ________



Actividad 20. Traza cinco triángulos rectángulos en tu cuaderno y completa la tabla. Utiliza una calculadora científica. Si hay dudas, consulta al profesor.

Triángulo	Medida del ángulo α	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Medida de la hipotenusa	sen(α)	cos(α)
1						
2						
3						
4						
5						

◆ Compara tus procedimientos de las actividades 18, 19 y 20 con los del grupo. Considerando lo que han llevado a cabo analicen lo siguiente: "en un triángulo rectángulo, el seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento".

4.5 Seno, coseno y tangente

Explicito y uso las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente.

Cálculo mental

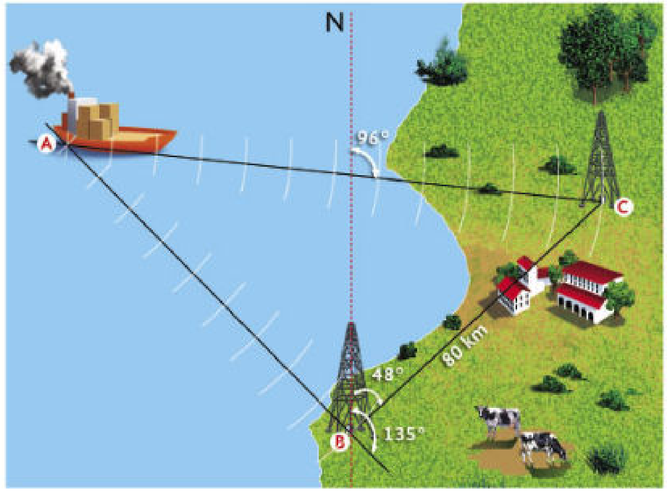
a) 99° – 12° = ________
b) 104° – 34° = ________
c) 115° – 64° = ________
d) 112° + 35° = ________
e) 221° + 139° = ________

Activo mis competencias

Analiza la información y la imagen, y resuelve.

Una embarcación que se ubica en el punto **A** lanza señales de auxilio, las cuales son recibidas por dos antenas de radio que se ubican en los puntos **B** y **C**, cuya distancia es de 80 km entre sí. La antena en **B** recibe señales con una dirección de 135° norte y la antena en **C** las recibe con una dirección de 96° norte. La recta que une los puntos **B** con **C** forma un ángulo de 48° norte. Calcula la distancia a la que se encuentra la embarcación de cada antena.

a) $\overline{AB}$ = ________ $\overline{AC}$ = ________



b) Escribe el procedimiento que llevaste a cabo, sobre todo menciona las propiedades geométricas que utilizaste. ________

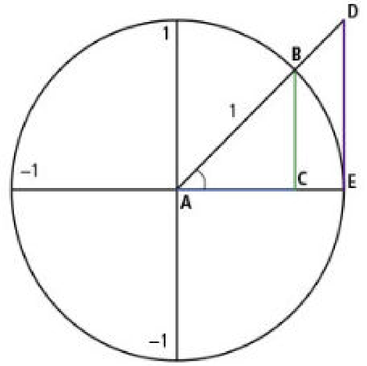
____

____

◆ Reúnete con un compañero y comenten qué propiedades geométricas aplicaron para sostener sus argumentos. ¿Utilizaron alguna propiedad de los ángulos? ¿Se apoyaron en propiedades de semejanza o congruencia de triángulos?

Consolido mis competencias

Actividad 21. **Analiza el círculo de radio igual a una unidad (círculo unitario), centrado en el origen del plano cartesiano y responde.**



a) Observa el Δ**ABC** de la izquierda y completa.

sen(**A**) = ____________________

cos(**A**) = ____________________

tan(**A**) = ____________________

b) Observa que sen(**A**) es igual al valor de la ordenada en el punto **B**(x, y). Siguiendo esta misma idea, responde lo siguiente.

- ¿A qué es igual cos(**A**)? ____________
- ¿A qué es igual tan(**A**)? ____________

c) Analiza, en parejas, los pasos y vuelvan a revisar la respuesta al inciso anterior.

- Revisen el valor de tan(**A**) en Δ**ABC**. ____________
- ¿Cómo son entre sí Δ**ABC** y Δ**ADE**? ____________

Justifíquenlo. ____________________

____

____

- Completen $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ = ____________________
- ¿A qué es igual la medida del segmento $\overline{AE}$? ____________
- Sustituyan el valor de $\overline{AE}$ en la razón anterior ($\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$) y concluyan a qué es igual tan(**A**).

____

TIC

Entra a www.redir.mx/matfort3-188, haz clic en el punto **C** y sin soltar muévelo sobre la circunferencia; analiza qué sucede con las razones trigonométricas.

◆ **Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Corrijan los posibles errores y revisen de nuevo, con ayuda del profesor, el razonamiento del último inciso.**

Consolido mis competencias

Actividad 22. **Haz, en parejas, lo siguiente en caso de no contar con una calculadora.**

a) Tracen sobre un eje coordenado un círculo unitario, de radio 1 (graduado en décimos: 0.1, 0.2, 0.3, …, 1), con centro en el origen **A**(0, 0).

b) Tracen tres perpendiculares al eje x en cualquiera de los valores decimales y hasta el cruce con la circunferencia.

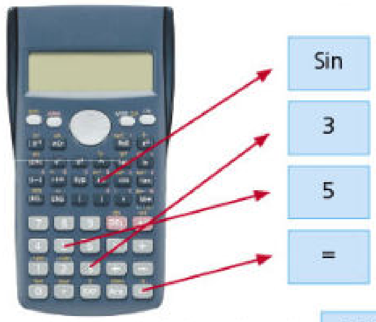
c) Tracen los triángulos rectángulos: Δ**ABC**, Δ**ADE** y Δ**AFG**.

d) Obtengan, con apoyo de su profesor, las medidas que consideren necesarias para calcular las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en los triángulos y observar qué sucede con éstas conforme varía la medida del ángulo (en el origen).

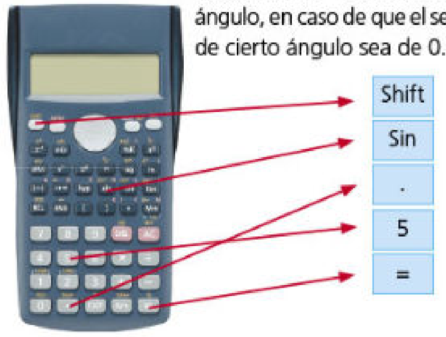
Actividad 23. **Lee la información y resuelve.**

Es posible conocer el valor de las distintas funciones trigonométricas para cada medida del ángulo agudo de un triángulo rectángulo a partir del uso de la calculadora científica o el manejo de tablas trigonométricas. También, de manera inversa, se puede determinar el valor del ángulo, si se conoce el valor de la función trigonométrica.

Para calcular el seno de 35°



Para calcular la medida del ángulo, en caso de que el seno de cierto ángulo sea de 0.5



En algunas calculadoras la tecla Shift puede aparecer como 2ndf o como INV

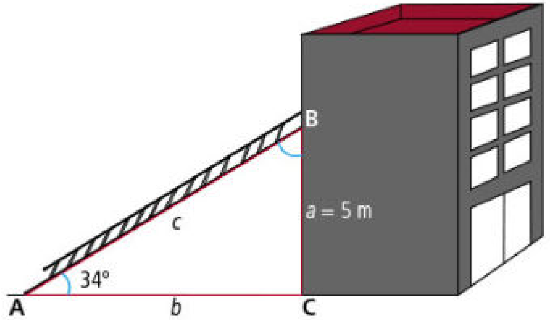
a) Halla, con calculadora científica o tablas trigonométricas, los valores faltantes de la tabla.

Ángulo	Seno (sen)	Coseno (cos)	Tangente (tan)
30°			
		0.7071	
			1.732
	0.0871		

◆ **Revisa, con el grupo, las respuestas y corrijan los posibles errores. Con ayuda de su profesor, observen qué sucede con la tangente de 0°, 45° y 90°.**

Consolido mis competencias

Actividad 24. Calcula, en parejas, el valor de los elementos desconocidos del triángulo rectángulo para resolver el problema.



Longitud de la escalera c = ______

Distancia de la escalera al edificio b = ______

Ángulo entre la escalera y el edificio $\measuredangle \mathbf{B}$ = ______

a) Respondan para calcular el valor del ángulo **B**.

- ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? ______
- ¿A qué es igual el $\measuredangle$**C**? ______
- ¿Cuál es el resultado de la suma de los ángulos **A** y **B**? ______
- ¿Cuál es la medida del ángulo **B**? ______

b) Contesten lo siguiente para calcular el valor del lado b.

- Si consideran $\measuredangle$**A** = 34° como ángulo de referencia, ¿qué relación existe entre el ángulo y el lado a? ______
- ¿Qué relación existe entre el ángulo de referencia ($\measuredangle$**A**) y el lado b (que se pretende calcular)? ______
- ¿Qué razón trigonométrica relaciona al ángulo de referencia ($\measuredangle$**A**), con los lados a y b del triángulo rectángulo? ______
- Escriban la razón trigonométrica que concluyeron en la pregunta anterior, sustituyan sus valores, hagan los cálculos correspondientes y encuentren el valor del lado b.

______

$$\square = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \square = \frac{5}{b} \qquad b = \frac{5}{\square} \qquad b = \frac{5}{\square}$$

c) Para calcular el valor de c.

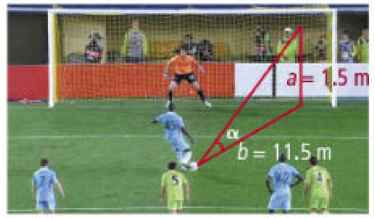
- ¿Qué razón trigonométrica relaciona al ángulo de referencia ($\angle$**A**), con las medidas de los lados a (valor conocido) y c (valor a calcular) del triángulo rectángulo? ______
- Escriban la razón trigonométrica que concluyeron en la pregunta anterior, sustituyan sus valores, efectúen los cálculos correspondientes y encuentren el valor del lado c.

$$\square = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \square = \frac{5}{c} \qquad c = \frac{5}{\square} \qquad c = \frac{5}{\square}$$

- Conocidos los dos catetos del triángulo rectángulo (a y b), ¿qué otro procedimiento, además de las razones trigonométricas, podrían emplear para calcular el valor de la hipotenusa (c)? ______
- Utilicen ese otro procedimiento para calcular el valor de c; anótenlo en su cuaderno.

◆ **Comenten si es posible calcular la medida de los datos desconocidos a partir del ángulo de referencia ($\measuredangle$B = 56°). Lleven a cabo, en su cuaderno, los cálculos correspondientes y compárenlos con los obtenidos usando el ángulo de referencia ($\measuredangle$A).**

Actividad 25. Analiza la imagen y resuelve.



a) ¿Cuál fue la medida del ángulo de elevación α alcanzado por el balón para anotar gol?

______

b) ¿Cuál de las razones trigonométricas relaciona el ángulo de disparo con la distancia del manchón penal y la altura alcanzada por el balón?

______

c) Sustituyan los valores en la razón trigonométrica que seleccionaron y calculen el cociente (hasta diezmilésimos). ______

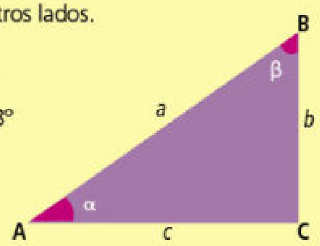
- Utiliza la calculadora (o una tabla trigonométrica) y determina la medida del ángulo **A**, a partir del valor de la razón trigonométrica que calculaste en el punto anterior.

- **Comenta con tus compañeros qué elementos mínimos son necesarios en un triángulo rectángulo para el cálculo de los otros elementos.**

Formalización. En un triángulo rectángulo…

Si se conoce la medida de un lado y la de un ángulo agudo, se pueden obtener las medidas de los otros lados.

$a = 45$ m, $\measuredangle C = 22°$
$\measuredangle C = 90° - 22° = 68°$
$\text{sen}(22) = \frac{b}{45}$
$b = 6.85$ m
$\cos(22) = \frac{c}{45}$
$c = 41.72$ m

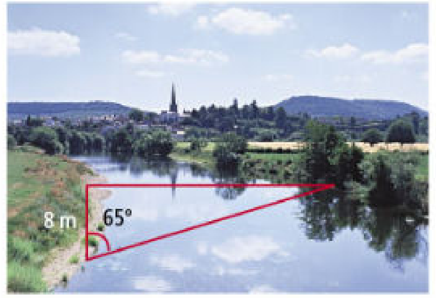


Si se conocen las medidas de dos lados se puede calcular la medida de los ángulos agudos.

$a = 41.5$ m, $\measuredangle C = 28°$
$\text{sen}(\measuredangle \mathbf{B}) = \frac{28}{41.5} = 0.6746,$
$\measuredangle \mathbf{B} = \text{inv sen } 0.6746 = 42°$
$\measuredangle C = 90° - 42° = 47°$
$c = a \cos(\measuredangle \mathbf{B}),\ c = 30.631$

Actividad 26. **Analiza la imagen y resuelve. Utiliza el espacio para escribir tus cálculos.**

a) ¿Cuál es la medida del ángulo de elevación α de la escalinata de la pirámide de Kukulcán en Chichén Itzá? ____________



b) ¿Cuánto mide el ancho del río? ____________

- **Compara tus resultados con los de tus compañeros y corrijan los posibles errores.**

4.6 Razón de cambio

Calculo y analizo la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identifico la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

Cálculo mental

a) $2x + 3 = 18$, $x =$ ______
b) $x - 13 = 27$, $x =$ ______
c) $5x + 15 = 60$, $x =$ ______
d) $-x - 80 = 10$, $x =$ ______
e) $9x + 15 = 60$, $x =$ ______

Activo mis competencias

Trabaja en equipo. Lean la información y respondan. En un autolavado tienen una pileta de 400 l donde almacenan el agua. Para llenarla pueden hacerlo de dos maneras:

I) utilizar una manguera con un flujo de agua de 5 litros por minuto,

II) emplear una cubeta de 8 l que tarda 1 min en llenarse; se requiere medio minuto en caminar, echarla a la pileta y regresar a la llave donde se vuelve a llenar.

a) ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse la pileta con la primera opción? ____________

b) ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse si se utiliza la segunda opción? ____________

c) ¿Hay alguna otra forma en la que se pueda llenar la pileta en menos tiempo? Expliquen.

- **Comparen sus resultados y procedimientos con los de sus demás compañeros. Expliquen si fue necesario plantear una o varias ecuaciones para encontrar la respuesta.**

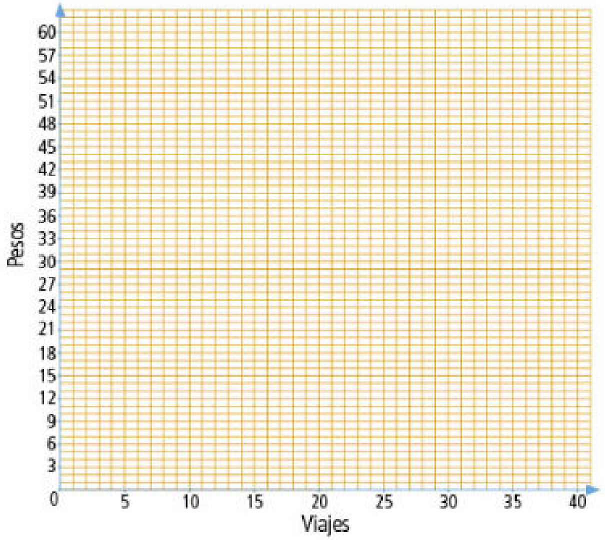
Consolido mis competencias

Actividad 27. **Trabaja en equipo. Deberán explicar sus respuestas en algunos casos.**

a) El viaje por persona en el metro de la Ciudad de México cuesta $3.00.

- ¿Cuánto pagará una familia de cuatro personas por un viaje? ____________
- ¿Cuánto pagarán si compran los boletos de ida y de regreso? ____________
- ¿Cuánto pagarán por un viaje si van dos familias de seis personas cada una? ____________
- ¿Cuántas personas viajaron si se pagaron $27.00? ____________

b) Completen la tabla del costo por boleto en el metro y tracen la gráfica.



Viajes (v)	Pesos (p)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

- ¿Cuál es la máxima cantidad de viajes que se pueden comprar con $350.00? ______
- Si se gastaron $33.00, ¿cuántos viajes se compraron? Expliquen cómo lo obtuvieron.

______

Reflexiona

Si dos variables, x y y, guardan una relación de proporcionalidad directa, existe entre ellas una constante $k \neq 0$ tal que $y = kx$. Esa constante k se llama *constante de proporcionalidad*. ¿Tiene alguna relación la constante de proporcionalidad con el cociente $\frac{\text{pesos}}{\text{viajes}}$?

- Utilicen los números de la pregunta anterior; dividan lo que gastaron entre el número de viajes. ¿Qué resultado obtienen? ______
- Si se pagaron $225.00, ¿cuántos viajes se compraron? ______
- Dividan $225.00 entre el número de viajes que compraron. ¿Qué resultado obtienen? ______
- En la tabla que llenaron hay tres renglones marcados con amarillo, obtengan con cada uno el cociente $\frac{p}{v}$. ¿Qué resultado obtienen? ______
- Si el precio del boleto subiera $1.00, ¿cuánto se obtendría en el cociente $\frac{p}{v}$? ______

- Si el cociente $\frac{p}{v}$ fuera de 2.5, ¿qué podrían concluir del precio por viaje? ______

______

- Tracen la gráfica de la relación entre los viajes y pesos de las dos preguntas anteriores sobre el mismo plano donde trazaron la primera gráfica. Si el cociente es más grande, ¿qué sucede con la inclinación de la recta? ______

______

- Escriban una ecuación que les permita conocer la cantidad de pesos que pagarán si conocen el número de viajes que comprarán. ______

◆ **Compartan sus reflexiones sobre los diferentes procedimientos que utilizaron. Lean la información y discutan acerca de la inclinación de las distintas gráficas que trazaron, ¿es posible que la inclinación de la recta aporte información? ¿De qué tipo?**

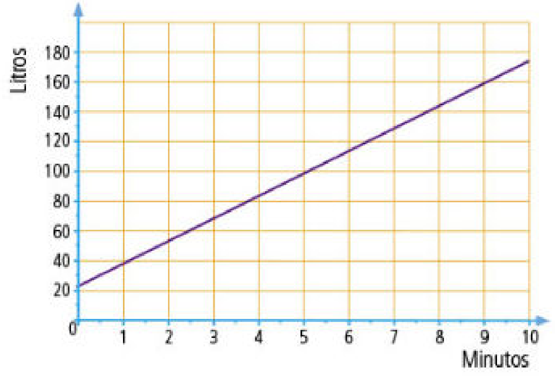
Formalización. Cuando se tiene una relación funcional entre dos variables, se puede estudiar el cambio de una variable respecto a la otra.

En el ejemplo anterior, la cantidad que se paga aumenta $3.00 por cada viaje. A este cambio se le llama **razón de cambio**, y se dice que la razón de cambio es de tres pesos por viaje.

Si el precio por viaje aumenta, la razón de cambio aumenta también; o si el precio por viaje disminuye, la razón de cambio también disminuye, es decir, la razón de cambio da información acerca de cómo cambia una de las variables respecto a la otra.

Actividad 28. Trabaja en pareja. Hagan lo que se pide.

Un tanque de agua está a 10% de su capacidad y se llenará mediante una bomba hidráulica. La gráfica muestra cómo aumenta la cantidad de agua en el tanque durante los primeros 10 minutos.

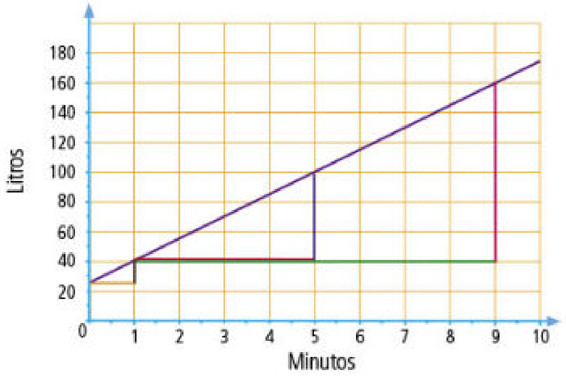


a) Analicen la gráfica de la página anterior y completen la tabla.

Minutos	0	1	5	9	10	11	12	13	14	15
Litros	25									

- ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse el tanque? __________
- ¿Cuántos litros entraron en el primer minuto? __________
- ¿Cuántos litros entraron del minuto 1 al minuto 5? __________
- ¿Cuántos litros entraron del minuto 1 al minuto 9? __________
- ¿Cuál es el incremento de litros por minuto? __________

b) Observen la siguiente gráfica. Calculen el cociente de los litros por minuto indicado en cada caso, es decir calculen la razón de cambio de los litros respecto al tiempo (minutos).



- Calculen la razón de cambio del minuto 0 al minuto 1, que está indicada por las líneas amarilla y gris. __________
- Calculen la razón de cambio del minuto 1 al minuto 5, que está indicada por las líneas roja y azul. __________

Entra a www.redir.mx/matfort3-196 y resuelve los problemas propuestos.

TIC

- Calculen la razón de cambio del minuto 1 al minuto 9, que está indicada por las líneas verde y rosa. __________
- Calculen la razón de cambio del minuto 5 al minuto 9. __________
- ¿Hay muchas razones de cambio o sólo una? Explíquenlo. __________

c) Escriban una ecuación que les permita conocer el número de litros que hay en el tanque si conocen el tiempo transcurrido. __________

- ¿Cuánto tiempo tardaría en llenarse el tanque si el flujo del agua se aumenta al doble? __________
- ¿Cuánto tiempo tardaría en llenarse el tanque si el flujo del agua disminuyera a la tercera parte? __________
- Tracen, en su cuaderno, la gráfica de la función hasta el minuto 20; descríbanla. __________

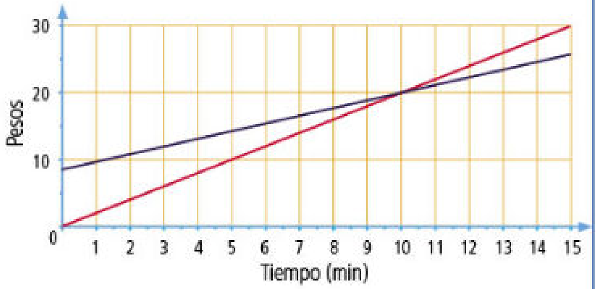
◆ **En el mismo plano de la gráfica anterior, tracen las gráficas que describan el cambio en el flujo del agua al doble y a la tercera parte. Comenten, con el grupo, qué sucede con la inclinación de las rectas y qué información proporciona la inclinación.**

Actividad 29. Lee con atención y analiza la gráfica para resolver lo que se pide.

Una persona aborda un taxi cuya tarifa es de \$9.00 el banderazo y después cobra cierta cantidad por minuto. Transcurridos 10 minutos se baja y paga 20 pesos. ¿Cuánto cobra el taxi por minuto? __________

a) La misma persona tiene la oportunidad de elegir si aborda un taxi cuyo banderazo es de \$9.00 y cada minuto le cobran \$1.10 o un taxi que no cobra banderazo pero por cada minuto son \$2.00. A continuación se muestran las gráficas que describen el aumento del precio que se paga en los dos casos.

b) Determina cuál de las dos rectas describe al taxi que cobra banderazo y cuál al que no. Explica cómo lo hiciste. __________



c) Si la persona puede elegir entre tomar un taxi u otro, ¿qué opción le conviene más? Explica tu respuesta. Te puedes ayudar de las gráficas para sustentar tus ideas.

d) ¿Cuál es la razón de cambio de la gráfica en color negro y cuál corresponde a la gráfica en color rojo?

e) En las rectas, ¿qué relación existe entre las razones de cambio y la inclinación?

f) Escribe la expresión que corresponde a cada gráfica.

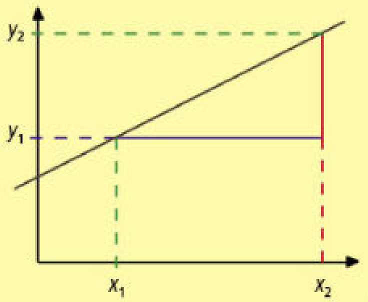
Gráfica color negro: ______________ Gráfica color rojo: ______________

◆ **Compara tus respuestas con las del grupo. Comenten acerca de la relación entre la inclinación de la recta y la razón de cambio. Expliquen también qué datos son los mínimos suficientes que necesitan conocer para calcular la razón de cambio. ¿Tendrá sentido una razón de cambio negativa? ¿Qué tipo de fenómeno describiría una razón de cambio negativa?**

Formalización. La **razón de cambio** se calcula mediante el cociente del cambio en y entre el cambio en x, es decir, si se tienen dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) entonces:

$$\text{razón de cambio} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

A la **razón de cambio** también se le conoce como **pendiente** de la recta e indica la inclinación que ésta tiene.



Actividad 30. Lee la información anterior y responde en tu cuaderno.

Regresa al problema de la sección "Activo mis competencias". Revisa de nuevo tu procedimiento y respuestas, construye las gráficas correspondientes para cada caso en el mismo plano. Analiza las dos rectas, ¿cuál es la razón de cambio de cada una?

4.7 Desviación media y rango

Mido la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Analizo las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.

Cálculo mental

a) $\frac{5.5 + 5.6 + 5.7 + 5.8}{4} =$ ______

b) $\frac{4.6 + 4.7 + 4.7 + 4.6}{4} =$ ______

c) $\frac{0.2 + 1.3 + 1.4 + 1.5}{4} =$ ______

d) $\frac{0.01 + 0.02 + 0.03}{3} =$ ______

Activo mis competencias

Analiza la información, los datos de la tabla y responde.

La tabla muestra la cantidad de veces que fueron visitados cinco *stands* durante los 10 días en que se llevó a cabo una feria de alimentos. Con el estudio se desea identificar qué *stand* es el idóneo para repetir la temática el siguiente año.

Día \ *Stand*	A	B	C	D	E
I	3	2	6	5	9
II	5	9	7	2	8
III	25	19	8	6	5
IV	7	8	3	7	6
V	6	6	20	8	11
VI	8	3	13	12	16
VII	2	15	1	16	4
VIII	7	9	5	19	12
IX	13	15	8	9	8
X	14	4	19	6	11
Media					

a) ¿Consideras que la media del conjunto de datos te permite identificar el mejor *stand*?

______________ ¿Por qué? ______________

b) Calcula la moda y el rango del conjunto de datos.

Moda: ______________ **Rango**: ______________

◆ **Comenta con tus compañeros si estos tres valores (media, moda y rango) se pueden considerar un indicador diferenciador para elegir el mejor *stand*. Anota tus conclusiones en el cuaderno.**

Consolido mis competencias

Actividad 31. Responde en parejas. Utilicen los datos de la tabla.

Horas en las que tres estudiantes de secundaria ensayaron en la clase de música durante nueve meses.

Alumno \ Mes	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
A	36	6	42	48	60	54	42	66	54
B	72	54	30	18	42	60	66	48	12
C	78	48	18	78	18	24	78	18	42

a) Para un concurso interescolar, ¿qué alumno será elegido por el profesor de música por ser el más constante en sus ensayos? ______

Recuerda

El valor absoluto de un dato es su distancia a cero.

b) Obtengan el promedio de horas en las que cada alumno ensayó, durante los nueve meses.

Alumno **A**: ______ Alumno **B**: ______ Alumno **C**: ______

c) Calculen el rango para cada conjunto de datos.

Alumno **A**: ______ Alumno **B**: ______ Alumno **C**: ______

d) Completen la tabla. Calculen en cada caso el valor absoluto de la diferencia entre las horas de ensayo de cada alumno y 44.6.

Diferencia de **A** con 44.6			2.6		15.4				9.4
Diferencia de **B** con 44.6									
Diferencia de **C** con 44.6									

e) Calculen la media aritmética de las diferencias en cada fila de la tabla anterior.

Alumno **A**: ______ Alumno **B**: ______ Alumno **C**: ______

◆ **Analicen sus respuestas con otros equipos y, entre todos, concluyan si los datos obtenidos en e) son un mejor indicador para saber qué alumno se ha dedicado a ensayar más horas o con mayor constancia.**

Consolido mis competencias

Actividad 32. Considera las respuestas de la actividad 31 y completa los pasos para calcular la desviación media de un conjunto de datos.

- Se calcula la media aritmética del conjunto de datos. ______

Formalización. En la actividad 31 inciso e) se calcularon tres valores, uno por cada alumno. A ese dato se le conoce como **desviación media** e indica qué tan dispersos están los datos respecto a la media aritmética. En el ejemplo, el valor de la media aritmética es 44.6 y el alumno **A** es quien está menos alejado 13.05, por lo que debe considerarse el número sin signo.

Al obtener la media aritmética del valor absoluto de las diferencias se obtiene la desviación media.

Actividad 33. Utiliza los datos y responde.

a) El siguiente conjunto de datos representa los asistentes a un cine los sábados por la tarde a lo largo de un semestre.

658	483	726	840	567	495	690	457	565	689	761	752
844	688	756	889	789	566	652	741	580	450	567	724
562	640										

- Determina el rango. ______
- Calcula la desviación media. ______
- Explica cuál es la intención de hacer un estudio como éste. ______

TIC Visita www.redir.mx/matfort3-201 Revisa el video, haz clic en la opción "Practica: Desviación media absoluta (MAD)" y resuelve las actividades que se proponen. Compara tus resultados con los de algún compañero y corrijan sus errores.

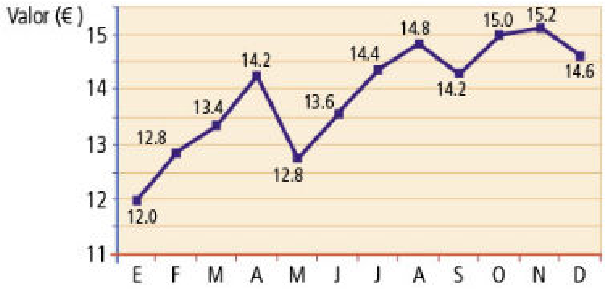
b) La tabla muestra las calificaciones obtenidas en un examen de matemáticas.

Calificación	3	4	5	6	7	8	9
Núm. de alumnos	3	6	9	12	14	10	8

- Calcula el rango. ______
- Obtén la desviación media. ______
- ¿Consideras que en este grupo hubo buen aprovechamiento? ______

c) La gráfica muestra la cotización de las acciones de una operadora telefónica en la bolsa de valores a lo largo de un año.

- Calcula el rango. ______
- Obtén la media. ______
- Calcula la desviación media. ______



- Una persona quiere vender sus acciones el próximo año. Si tú fueras el comprador, ¿cuál consideras un precio justo? Explica. ______

◆ Comenta, con tus compañeros y profesor, en qué casos conviene utilizar el rango o la desviación media como el indicador diferenciador.

Consolido mis competencias

Actividad 34. Analiza cada gráfica, haz los cálculos que se piden y relaciona cada descripción con la gráfica que le corresponde.

Gráfica 1

- Rango: ______
- Media: ______
- Desviación media: ______

Gráfica 2

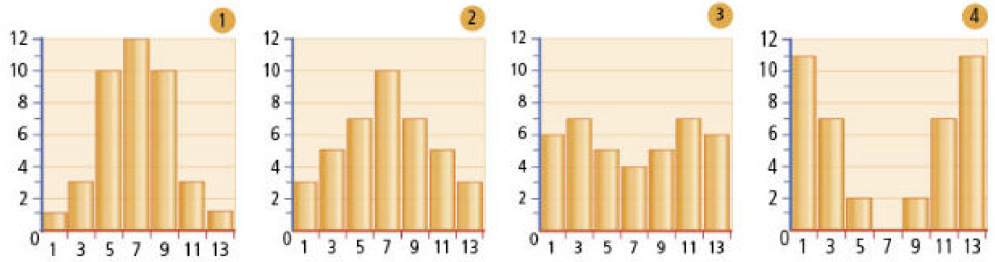
- Rango: ______
- Media: ______
- Desviación media: ______

Gráfica 3

- Rango: ______
- Media: ______
- Desviación media: ______

Gráfica 4

- Rango: ______
- Media: ______
- Desviación media: ______



a) Tiene el mayor número de datos alrededor de la media. Así, su desviación media será la más baja. ______

b) Es la que presenta una dispersión mayor de los datos. ______

c) También tiene sus datos con menor dispersión, pero su desviación media no es la más baja. ______

d) Sus valores presentan un comportamiento "uniforme". ______

◆ Analiza en grupo. ¿Es cierto que a menor desviación media los datos se acercan más al promedio? Escriban una justificación en el cuaderno.

Consolido mis competencias

Actividad 35. Haz, en equipo, los cálculos que se indican, grafiquen y anoten sus conclusiones.

Éstas son las temperaturas máximas y mínimas medias obtenidas en 40 estaciones meteorológicas repartidas por toda una ciudad a lo largo del año 2012.

Temperaturas máximas (en °C)

20.2	20.6	21.3	18.8	18.9	20.4	21.1	20.8	20.6	22.1	21.8
21.9	19.9	18.1	17.3	19.4	22.0	18.6	19.4	22.4	21.2	20.0
20.6	19.2	20.6	21.1	20.7	20.5	23.3	17.2	18.3	20.1	21.9
19.4	20.9	20.5	19.2	16.0	20.7	21.9				

Temperaturas mínimas (en °C)

9.9	10.9	8.9	5.0	2.6	9.9	6.8	10.9	11.6	8.4	11.2
11.6	11.7	6.3	0.6	8.2	10.6	7.6	6.5	10.0	13.3	12.0
7.3	5.7	6.4	7.6	9.7	7.1	10.7	3.1	7.8	7.5	8.5
6.5	10.2	9.1	8.8	4.2	7.2	8.4				

TIC

Visita www.redir.mx/matfort3-204. Lee con atención y haz clic en la sección "Ejercicios" para practicar. Compara tus resultados con los del grupo.

a) Reacomoden los datos y tracen, en su cuaderno, una gráfica de frecuencias para cada conjunto.

b) Calculen la media de las temperaturas máximas y la media de las mínimas. ______________________

c) Calculen el rango y la desviación media para cada conjunto de datos. ______________________

d) ¿En qué caso hay más dispersión, en las temperaturas máximas o en las mínimas? ______________________

e) ¿Por qué es importante hacer un estudio de este tipo de datos? ______________________

◆ Regresen al problema de la sección "Activo mis competencias" y grafiquen los datos. Revisen sus respuestas y corrijan los posibles errores. En grupo, respondan qué *stand* debería permanecer para la próxima feria. En términos generales, ¿cómo se relaciona la magnitud de la desviación media con la forma de la gráfica de frecuencias? Con ayuda del profesor verifiquen y mejoren sus primeras conclusiones.

¿Qué tanto sé?

Selecciona la opción correcta.

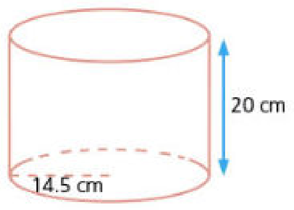
1. ¿Qué expresión corresponde a la sucesión 3, 9, 19, …?

a) $5x^2 - 9x + 7$ b) $-x^2 + 12x - 8$
c) $2x^2 + 1$ d) $3.5x^2 - 7.5x + 10$

2. ¿Qué sucesión corresponde a la expresión $-5x^2 + 3x - 1$?

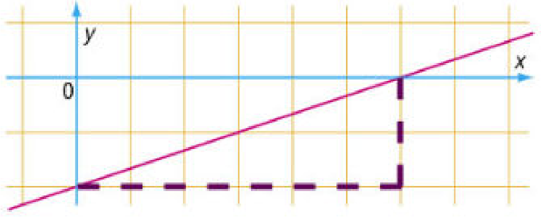
a) −3, −9, −37, … b) −3, −15, −45, …
c) −5, −15, −37, … d) −3, −15, −37, …

3. Alfonsina envolverá con papel una caja cilíndrica con las medidas mostradas. ¿Cuánto papel necesita? (Considera $\pi = 3.14$).



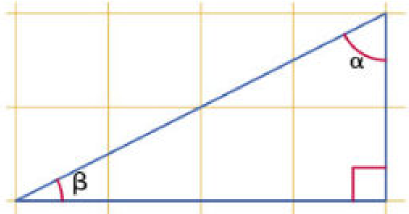
a) 3 141.57 cm² b) 2 481.385 cm²
c) 1 821.20 cm² d) 660.185 cm²

4. Con base en el triángulo rectángulo mostrado, ¿qué pendiente tiene la recta?



a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{6}{2}$
c) $-\frac{2}{6}$ d) $-\frac{6}{2}$

5. Respecto al triángulo rectángulo de la derecha, ¿qué igualdad es falsa?



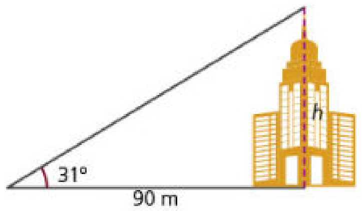
a) sen α = cos β

b) sen β = cos α

c) $\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$

d) $\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}$

6. ¿Qué ecuación permite calcular la altura del edificio (h)?



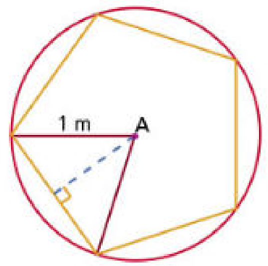
a) $h = 90(\tan 31°)$

b) $h = \operatorname{sen} 31° + \frac{\cos 31°}{90}$

c) $h = \frac{90}{\cos 31°}$

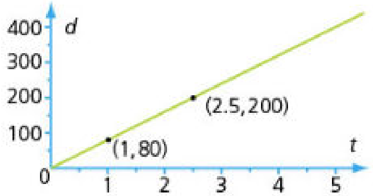
d) $h = 90(\operatorname{sen} 31°)$

7. ¿Cuál es el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia cuyo radio mide 1 m? (Considera que sen 36° = 0.59; cos 36° = 0.81 y tan 36° = 0.73).



a) 2.9565 m²
b) 2.6645 m²
c) 2.3895 m²
d) 2.1535 m²

8. Un automóvil se mueve con velocidad constante; la gráfica relaciona su desplazamiento *d* (en kilómetros) y el tiempo transcurrido *t* (en horas). ¿Qué razón de cambio corresponde a la velocidad del vehículo?



a) $\frac{2.5-1}{200-80}$ b) $\frac{2.5-200}{1-80}$

c) $\frac{200-80}{2.5-1}$ d) $\frac{200-2.5}{80-1}$

9. ¿Cómo son el promedio y la desviación media de los datos del conjunto A comparados con los del B?

A: {1, 2, 4, 5, 6, 8, 9} B: {1, 1, 4, 5, 6, 9, 9}

a) El promedio del conjunto A es igual al del B; pero la desviación media de A es menor que la de B.

b) El promedio del conjunto A es mayor que el de B; pero la desviación media de A es igual a la de B.

c) La desviación media y el promedio son iguales en ambos conjuntos.

d) La desviación media y el promedio son distintos en ambos conjuntos.

10. Paulina midió su estatura y la de sus compañeras de equipo, y obtuvo los siguientes datos. Laura: 160 cm; Esmeralda: 158 cm; Sofía: 155 cm; Paulina: 152 cm; Lulú: 150 cm. ¿Qué afirmación es falsa?

a) El rango de las estaturas es de 10 cm.

b) La estatura promedio es de 155 cm.

c) La desviación media es de 3.2 cm.

d) La mayor desviación es de 5 cm y la menor, de 3 cm.

Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas con las del grupo y valídalas.

Desafío del bloque

Hoteles

Un grupo de empresarios encargó a una empresa un estudio estadístico de los hoteles en la zona turística de una ciudad. La siguiente tabla muestra parte de los resultados del estudio.

Categoría	★	★★	★★★	★★★★	★★★★★
Número de hoteles	1	5	8	3	1
Precio máximo por habitación	$350.00	$550.00		$1 500.00	$3 700.00
Precio mínimo por habitación	$350.00		$750.00	$1 200.00	$1 800.00
Rango del precio	$0.00	$100.00	$200.00		$1 900.00
Precio promedio por habitación		$470.00	$850.00	$1 366.66	$2 350.00
Máximo de habitaciones	36	80	120	180	
Mínimo de habitaciones	36	55	100		
Rango del número de habitaciones	0			40	0
Promedio de habitaciones por hotel		60	110	153.3	210
Desviación media del número de habitaciones				17.7	0

Pregunta 1
- ¿Por qué en la categoría de una estrella, el rango del número de habitaciones es 0?

Pregunta 2
- ¿Por qué, a pesar de que sólo hay un hotel de cinco estrellas, el rango del precio por habitación no es 0?

Pregunta 3
- Si el hotel más grande de cuatro estrellas tiene 180 habitaciones, ¿cuántas hay en el más pequeño?

Pregunta 4
- Si se estima que para la próxima temporada vacacional se requieren 1 800 habitaciones, ¿será posible satisfacer la demanda?

Pregunta 5
- Completa los datos faltantes de la tabla; si no es posible calcular alguno, explica por qué.

Pregunta 6
- Escribe al menos un dato que no se mencione en la tabla, pero que pueda deducirse a partir de ella.

Pregunta 7
- Explica, de manera breve, para qué podría servirle a un hotelero la información de la tabla.

Al terminar, efectúa la autoevaluación del bloque 4 en la página 248.

BLOQUE 5

Aprendizajes esperados

El estudiante:

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, sólo se le revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella.

Carl Friedrich Gauss

5.1 Formulación de problemas a partir de una ecuación

Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulo problemas a partir de una ecuación dada.

Cálculo mental

a) $4k + 1 = 2$, $k =$ ____

b) $y - 5 = 3y - 25$, $y =$ ____

c) $5x + 6 = 10x + 5$, $x =$ ____

d) $9z - 2 = -1 + 2z$, $z =$ ____

e) $n + \frac{1}{5} = 3n - \frac{9}{3}$, $n =$ ____

Activo mis competencias

Trabaja en equipo. Lean la información y respondan en su cuaderno.

Un grupo de personas de la tercera edad alquiló un camión por $4 500.00 para hacer un viaje a la Riviera Maya. Días antes del viaje, tres personas decidieron no ir, así que las que viajarán deberán pagar $50.00 más para cubrir el monto..

a) Si x representa el número de personas que asistirán al viaje y y el costo, ¿cómo se obtiene la cantidad que se pagó por el camión?

b) Escriban una expresión algebraica para representar al número de personas que irán al viaje.

c) Anoten una expresión algebraica para calcular cuánto pagarán los pasajeros que viajarán.

d) Según el planteamiento del problema, ¿cómo se obtiene la cantidad que se pagó por el camión?

e) ¿Cuál era el precio del viaje por persona antes de que cancelaran algunos pasajeros?

f) ¿Cuántas personas contrataron al inicio?

g) ¿Cuánto pagarán las personas que llevarán a cabo el viaje?

◆ **Comparen sus resultados y procedimientos con los de sus demás compañeros. Expliquen cómo obtuvieron sus respuestas y discutan si fue necesario plantear una o varias ecuaciones para hallarlas.**

Consolido mis competencias

Actividad 1. **Planteen, en equipo, una o más ecuaciones que modelen la situación.**

a) El área de un terreno con forma rectangular mide 500 m^2. Si la diferencia de sus lados es de 5 m, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

- Si x representa el lado de longitud menor, propongan una expresión algebraica para el lado con mayor longitud y planteen la ecuación para calcular el área del terreno.

____

- ¿Cuáles son las longitudes de los lados? ________________

b) Un automóvil tiene un rendimiento de 10 km por litro en la ciudad y 14 km por litro en autopista. Se llevó a cabo un recorrido de 465 km con 40 l y se desea saber cuántos kilómetros fueron recorridos en la ciudad y cuántos en la autopista.

- Si x representa el número de litros de gasolina usados en la ciudad y y el número de litros usados en la autopista, ¿qué significan las expresiones $10x$ y $14y$? ______
- Planteen las ecuaciones con que se conozcan cuántos kilómetros fueron recorridos en la ciudad y cuántos en la autopista. ______
- Resuelvan, en su cuaderno, el sistema de ecuaciones.
- ¿Cuántos kilómetros se recorrieron en la ciudad? ______
- ¿Cuántos kilómetros se recorrieron en la autopista? ______

c) Raquel trabaja en una constructora donde le pagan semanalmente y además recibe una comisión sobre sus ventas. En la primera semana de noviembre vendió $2 500.00 en material y recibió $1 175.00 por concepto de comisión y salario semanal. La segunda semana vendió $3 400.00 y recibió $1 310.00. ¿Cuál es su salario semanal?

- Si x es el salario semanal que obtiene y y es el porcentaje que ella recibe por cada venta, anoten la ecuación para representar el salario de la primera semana de noviembre. ______
- ¿Cómo se expresa el salario de la segunda semana de noviembre? ______
- Si se restan las dos ecuaciones anteriores, ¿cuál de las dos incógnitas se obtiene y cuál es su valor? ______
- ¿Cuál es el valor de x? Expliquen cómo se obtiene. ______
- ¿Cuál es su salario semanal? ______
- ¿Qué porcentaje recibe de cada venta? ______

d) En una ciudad, un grupo de aficionados emprenden un proyecto para sembrar hortalizas en las azoteas de sus viviendas. Al iniciar el año, se repartieron 96 kg de semillas a 100 personas del grupo. A cada hombre le dieron 3 kg, a cada mujer 2 kg y a cada niño $\frac{1}{2}$ kg. Si el número de hombres rebasa por cuatro al de mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay en el grupo?

- Si h representa el número de hombres, m el número de mujeres y n el número de niños, ¿cómo se representa el número de personas totales en el grupo y la cantidad de kilogramos repartidos a hombres, mujeres y niños? ______
- Anoten, en su cuaderno, qué representa la expresión $h = m + 4$. Si se sustituye el valor de h en las dos ecuaciones anteriores, ¿cuáles son las dos nuevas ecuaciones que se obtienen. ______
- ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay? ______

e) Un niño sentado a la orilla de la autopista observa a un cartero pasar en su bicicleta a repartir el correo al pueblo vecino. El cartero va a una velocidad de 16 km/h. Después de un cuarto de hora, el mismo niño observa que pasa un motociclista a 28 km/h en la misma dirección. ¿Cuánto tiempo andará solo el cartero hasta que lo alcance el motociclista?

- Planteen las ecuaciones: ______
- ¿En cuánto tiempo se encontrarán? ______
- Si el pueblo vecino está a 10 km de distancia, ¿el motociclista encontrará al cartero antes de llegar al pueblo o no? Expliquen su respuesta. ______

f) ¿Les ha sucedido que alguien les dice algo parecido a lo siguiente? Piensen en un número, súmenle dos, multiplíquenlo por cuatro, súmenle seis, divídanlo entre dos y réstenle el doble del número que pensaron. El resultado es siete. ¿Cómo lo calculan?

- Ecuaciones: ______
- Expliquen por qué el resultado siempre es 7. ______
- Planteen un juego parecido con otros números y escríbanlo en su cuaderno.

- Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Compartan sus reflexiones sobre los diferentes tipos de ecuaciones que plantearon: ¿fueron lineales?, ¿con cuántas variables? Discutan acerca de la utilidad de plantear ecuaciones para resolver problemas y cómo obtienen esas ecuaciones. ¿Se pueden obtener respuestas correctas con planteamientos diferentes? ¿Por qué?

Actividad 2. Trabaja en pareja. En cada uno de los incisos se plantea una o más ecuaciones. Redacten un problema, que tenga sentido; es decir, que sea congruente con las variables y cuya respuesta se obtenga mediante la resolución de las ecuaciones.

a) $xy = 352$ $\quad$ $x + y = 38$

Resuelve los problemas propuestos en www.redir.mx/matfort3-212 TIC

b) $x(x - 4) = 480$

c) $464 = 12x + 8y$ $\quad$ $x + y = 40$

d) $x^2 + 2x - 8 = 0$

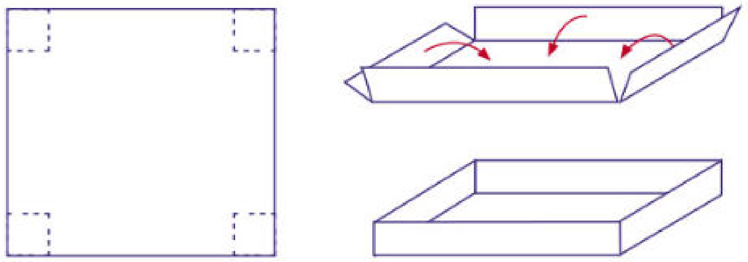
e) $3y + 200 = 4x$ $\quad$ $4x = 2y + 300$

- Comparen los problemas que plantearon con los de sus compañeros. Compartan sus reflexiones sobre los diferentes procedimientos que utilizaron. ¿Fue necesario resolver las ecuaciones para darles un contexto?

Consolido mis competencias

Actividad 3. Trabaja en pareja. Lean la información y respondan.

a) Se necesita fabricar una caja de cartón sin tapa de 15 cm de alto y cuyo volumen sea de 13 500 cm^3. La manera de construirla será cortar en cada esquina un cuadrado y luego levantar las partes restantes como se muestra.



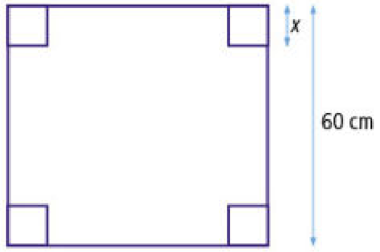
Nota histórica

En la Italia renacentista eran frecuentes los duelos en que los contendientes ponían a prueba sus habilidades para resolver problemas de matemáticas. Tartaglia fue muy famoso por su habilidad para ganar estos duelos. Investiga más acerca de la vida de este personaje.

- Para elaborar la caja se comprará un cuadrado de cartón, ¿qué dimensiones debe tener? ______
- ¿Cómo se calcula el volumen de la caja? ______
- Si la longitud del lado del cartón mide x cm, ¿cuánto mide el largo de la caja?
- ¿El ancho y el largo de la caja miden lo mismo?, ¿por qué? ______
- Planteen una ecuación que les ayude a encontrar las dimensiones del cartón. Saben que el largo mide ______, el ancho ______, la altura ______ y el volumen es de 13 500 cm^3.

  La ecuación es ______
- ¿Cuánto miden los lados del cartón? ______
- Si quieren que el volumen sea menor a 13 500 cm^3, al utilizar un cartón con las mismas dimensiones, ¿qué medidas deben tener los cuadrados que cortan en las esquinas? Expliquen, en su cuaderno, cómo llegan a su respuesta y verifiquen que sea correcta.

b) Si tienen un cartón de 60 cm × 60 cm y con éste deben construir una caja sin tapa al cortar las esquinas, ¿qué dimensiones deben tener los cuadrados que corten para que el volumen sea máximo?



- Planteen una expresión algebraica con la que calculen el volumen de la caja. ______
- Si le dan diferentes valores a x, el volumen cambia. Completen la tabla para observar ese cambio.

x (cm)	5	7	9	11	13	15
V (cm³)						

- ¿Qué valores de x de la tabla generan valores de V más grandes? ______
- Encuentren el volumen asignándole valores a x entre esos dos números, ¿qué observan? ______
- ¿Qué valor de x genera un volumen máximo? ______

c) Sin resolver la ecuación $(x - 4)^2 + 16 = (x + 6)^2 - 14$, indiquen cuántas soluciones tiene. Justifíquenlo. ______

- Verifiquen su respuesta, resuelvan la ecuación. ______

◆ **Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Compartan sus reflexiones sobre los diferentes procedimientos que utilizaron. Expliquen por qué el problema del inciso b) presenta mayor complejidad que el del inciso a).**

Actividad 4. Lee la información y responde las preguntas.

Regresa al problema de la sección "Activo mis competencias" y plantea un sistema de ecuaciones que modele el problema. Resuélvelo y compara tus respuestas con las que habías obtenido.

Planteamiento de ecuaciones: ______

◆ **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Expliquen cuáles son sus estrategias para plantear un sistema de ecuaciones, y contrasten estos procedimientos con el que utilizaron al inicio; discutan acerca de las ventajas y desventajas de cada uno.**

Para la próxima lección consigan los siguientes materiales: plastilina o arcilla suave para modelar, hilo de nailon o cualquier otro delgado y resistente, un colchón de tinta para sellos y una superficie lisa donde amasar la plastilina o la arcilla.

5.2 Cortes en cilindros y conos rectos

Analizo las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Calculo las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

Cálculo mental

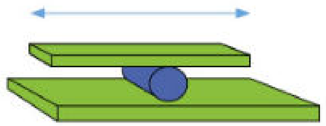
a) $3^2 + 6^2 =$ ______
b) $7^2 + 8^2 =$ ______
c) $10^2 + 11^2 =$ ______
d) $12^2 + 14^2 =$ ______
e) $13^2 + 15^2 =$ ______

Activo mis competencias

Consigue los siguientes materiales y efectúa la actividad.

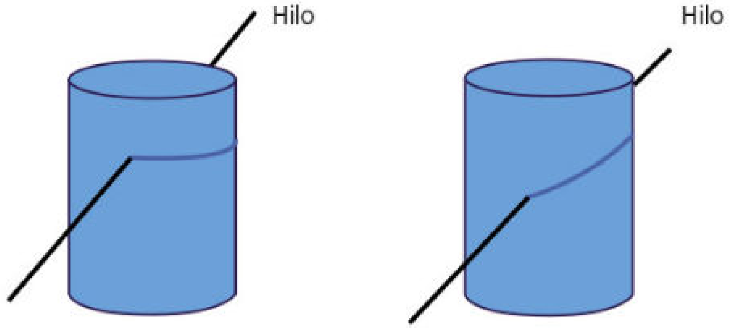
Material
- Plastilina o arcilla suave para modelar
- Hilo de nailon o cualquier otro delgado y resistente
- Un colchón de tinta para sellos
- Superficie lisa donde amasar la plastilina o la arcilla

Instrucciones
Modela un cilindro de plastilina (o arcilla) de tres o más centímetros de diámetro. Amásalo sobre la superficie lisa, apóyate con otro objeto liso (como una tabla) para que el cilindro sea lo más redondo posible.



a) Toma el hilo y, manteniéndolo bien tenso, corta el cilindro paralelamente a su base.

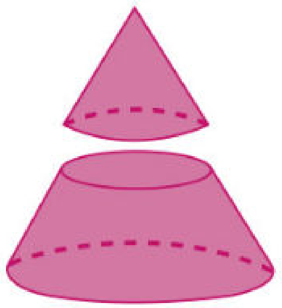
b) Haz otro corte pero inclinado; recuerda mantener el hilo lo más tenso que puedas.



c) ¿Qué forma observas en las caras de los cortes en los incisos anteriores? ______

d) Usa ambos cortes de plastilina como sellos y márcalos en tu cuaderno.

e) Junta toda tu plastilina (o arcilla) y modela, esta vez, un cono recto; procura que el cono no sea demasiado agudo en la punta y asegúrate de que sea recto.



f) Toma el hilo y, manteniéndolo bien tenso, haz un corte al cono paralelo a su base. ¿Qué figura observas?

____

g) Haz otro corte, de modo que el hilo tenso sea oblicuo a la base. ¿Qué figura observas en el corte?

____

h) Ahora tensa el hilo y haz un corte de tal forma que sea perpendicular a la base del cono.

Escribe el nombre de la figura que observas. _______________

i) Vuelve a formar el cono con plastilina, tensa el hilo y haz un corte de manera que sea paralelo a la generatriz del cono. ¿Qué figura obtuviste? _______________

j) Completa la tabla. Utiliza las caras de cada corte del cono que obtuviste en los incisos f), g), h) e i) y haz una marca de sello. Observa el ejemplo.

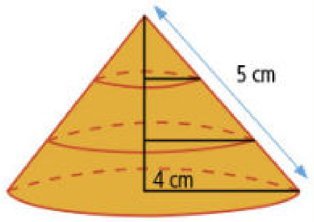
Corte paralelo a la base del cono	Corte oblicuo a la base del cono	Corte perpendicular a la base del cono	Corte paralelo a la generatriz del cono
f) 	g)	h)	i)

k) Compara los sellos con los que obtuviste en los cortes del cilindro; elabora, en tu cuaderno, una tabla como la anterior. Considera los diferentes cortes: perpendicular a la base, paralelo a la base, oblicuo que corte una de las bases y oblicuo que corte las dos bases.

- **Compara la forma de los sellos que obtuviste con las de tus compañeros. ¿En todos los casos son iguales?, ¿hay alguna figura que se haga presente en todos los casos?, ¿cómo se llama?**
- **Escribe, con el grupo, una conclusión sobre los distintos cortes que se obtienen en el cilindro y en el cono.**

Consolido mis competencias

Actividad 5. Observa las medidas del cono y responde.



a) ¿Cómo calcularías la altura? _______________

b) ¿Cuánto mide la altura? _______________

c) ¿Cuánto vale el radio con esa altura? _______________

d) ¿Y si se hace el corte a 2 cm de altura? _______________

e) Describe el procedimiento que seguiste para calcular las diferentes alturas. _______________

____

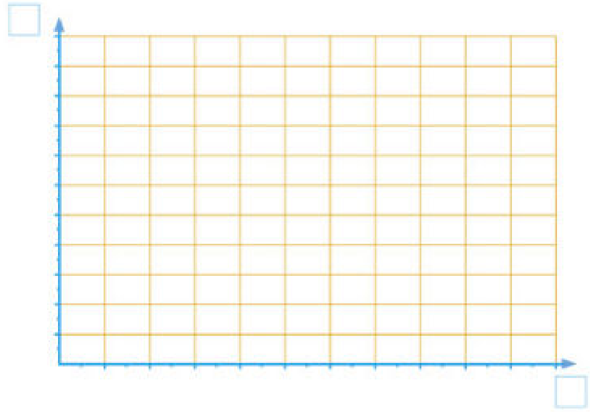
____

____

Actividad 6. Completa la tabla y grafica los datos. Nombra los ejes.

Considera un cono cuyo radio de la base (*r*) mide 5 cm y tiene 10 cm de altura (*h*).

Altura del cono (*h*)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Radio de la base (*r*)	5										



TIC Entra a www.redir.mx/matfort3-217 y estudia la información. Traza en tu cuaderno ejemplos de las cónicas que viste.

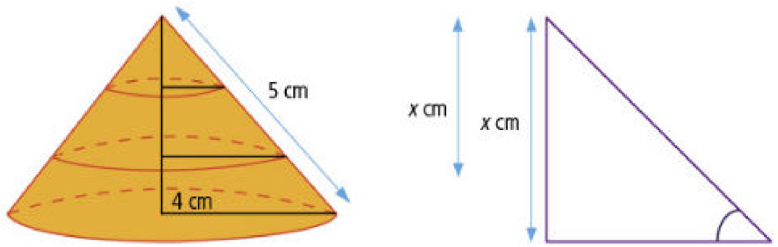
a) ¿Qué tipo de relación hay entre la altura y el radio? _______________

- **Compara tus resultados con los de tus compañeros. Escriban una conclusión grupal.**

Consolido mis competencias

Actividad 7. Emplea la semejanza de triángulos y las razones trigonométricas.

Identifica, en la imagen, dos triángulos semejantes y los lados que sean proporcionales. Haz las marcas correspondientes.



a) Utiliza las razones trigonométricas. ¿Cómo obtienes el valor del ángulo formado por la generatriz y el radio? Explícalo. ____________________

b) Considera el valor del radio (r) y el ángulo que obtuviste. ¿Cómo puedes hallar el valor de la altura x? Explícalo. ____________________

◆ **Verifica, en pareja, los resultados, comparándolos con los obtenidos en la actividad 5 y con los valores de la tabla de la actividad 6. Corrijan los posibles errores.**

Actividad 8. Calcula lo que se indica en cada cono.

Radio de la base: 7 m	Radio de la base: 25 m
Medida de la generatriz: 14 m	Ángulo formado por el radio y la generatriz: 70°
Radio del círculo a 8 m de altura: _______	Radio del círculo a 30 m de altura: _______

◆ **Discute, con tus compañeros de clase, cuáles son las ventajas de los procedimientos que estudiaron en las actividades 5, 6 y 7. ¿Cuándo conviene usar cada uno de ellos? ¿Qué métodos utilizarían con un cono cuyo tamaño sea tan grande que no se puedan tomar medidas directamente?**

Para la próxima lección consigan los siguientes materiales: un tramo de cartoncillo, un recipiente de $\frac{1}{4}$ l lleno de arena, lentejas o alguna otra semilla pequeña, algún tipo de pegamento, tijeras, regla, compás y transportador.

5.3 Volumen de cilindros y conos rectos

Construyo las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.

Cálculo mental

a) $5(3^2) + 7(3^2) =$ ________
b) $5(3^2) - 3(3^2) =$ ________
c) $4(9^2) - 6(5^2) =$ ________
d) $8(6^2) + 7(7^2) =$ ________
e) $7(8^2) - 10(5^2) =$ ________

Activo mis competencias

Lleva a cabo, en parejas, la actividad.

Materiales

- Un tramo de cartoncillo
- Cinta adhesiva, lápiz adhesivo o pegamento
- Recipiente de $\frac{1}{4}$ l lleno de arena, lentejas o alguna otra semilla pequeña
- Tijeras, lápiz, regla, compás y transportador

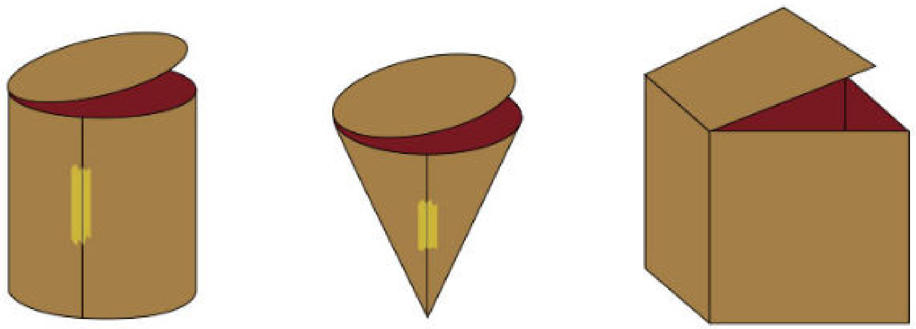
Instrucciones

a) Revisen la lección sobre desarrollos planos de cilindros y conos del bloque 4. Tracen, en el cartoncillo, el desarrollo plano de un cilindro y de un cono; ambos con diámetro de la base y la altura igual a 10 cm.

b) Tracen el desarrollo plano de un prisma cuadrangular cuya base mida lo más próximo a 8.86 cm de lado y 10 cm de altura.

c) Coloquen las pestañas en los bordes de los desarrollos planos para que puedan pegar los lados.

d) Recorten y peguen, pero dejen una tapa abierta en cada cuerpo.



e) Llenen, con arroz, arena o semillas, el cilindro hasta el borde y viértanlo al prisma cuadrangular.

f) ¿Sobra o falta espacio? ____________________

g) ¿Cómo es el volumen del cono comparado con el del cilindro? ____________

____

h) Calculen el área de la base de cada figura, redondeen hasta décimos.

Cono y cilindro: ____________ Prisma: ____________

i) ¿Cómo son las áreas de las bases entre sí? ____________

j) Obtengan el volumen del prisma. ____________

k) Como el prisma y el cilindro tienen igual volumen, ambas figuras tienen la misma área de la base y la misma altura. ¿Cuál es la fórmula para calcular el volumen del cilindro? ____________

____

l) Llenen el cono de arena y viértanla en el cilindro. Repitan esta acción hasta que el cilindro esté lleno. ¿Cuántas veces efectuaron el transvase? ____________

◆ **Ahora que conocen el volumen del cilindro, ¿cuál es el volumen del cono? Justifiquen su respuesta y coméntenla con sus compañeros de grupo.**

Consolido mis competencias

Actividad 9. **Haz lo que se indica y obtén el volumen del cilindro.**

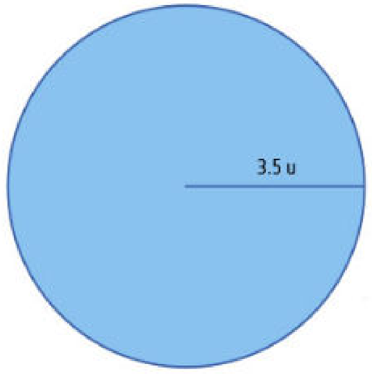
a) Calcula el área del círculo. Área: ____________

b) Recuerda que al calcular el área de una figura se puede saber cuántas veces cabe el área de un cuadrado unitario (1 u^2) dentro de ella. Con la misma idea escribe qué significa calcular el volumen de un cuerpo. ____________

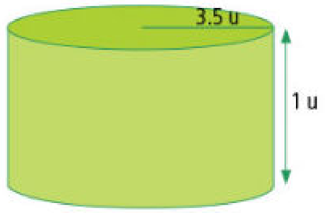
____

____

____



c) Utiliza tu definición de volumen del inciso anterior y calcula la del siguiente cilindro.



Volumen: ____________

Formalización. El volumen de un cilindro de una unidad de altura se obtiene multiplicando el área de la base por uno. $V = \pi r^2(1) = \pi r^2$

d) Justifica por qué es cierta la formalización anterior. Compara tus argumentos con los de un compañero. ____________

____

____

e) Ahora que sabes calcular el volumen de los cilindros de altura igual a una unidad, explica un procedimiento para calcular el volumen de los cilindros con cualquier altura. ____________

____

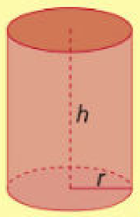
____

____

◆ **Comenta las diferentes observaciones de tus otros compañeros de clase. Escriban, con ayuda del profesor, los elementos comunes. Compara lo que escribiste en los incisos c) y d), y revisa la siguiente información.**

Formalización. El **volumen de un cilindro** de altura h se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

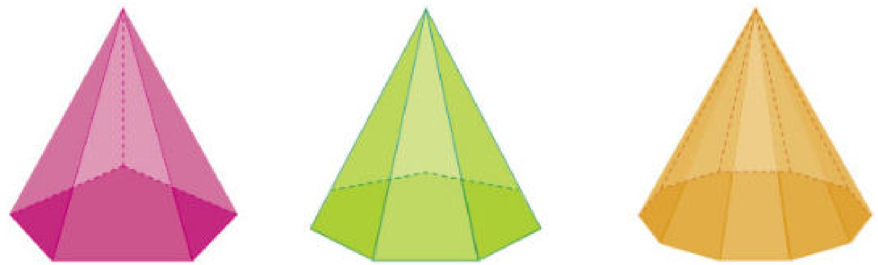
$$\text{Volumen del cilindro} = (\text{área de la base})(\text{altura})$$
$$V = \pi r^2 h$$



Consolido mis competencias

Actividad 10. Haz, en parejas, lo que se pide para obtener el volumen del cono.

Observen los siguientes cuerpos, todos tienen la misma altura.



a) ¿Cómo se obtiene el volumen de cada uno? ____________________

____

b) Observen que la forma del cono se parece mucho a la de la última pirámide. Continúa la sucesión de pirámides y responde.

¿Qué se debe aumentar a la siguiente pirámide para que tenga una forma todavía más parecida a la del cono? ____________________

c) Comenten con sus compañeros de clase. ¿Cómo son las áreas de las bases de estas figuras respecto a la base del cono? ____________________

____

d) ¿Cómo serán los volúmenes de estas pirámides respecto al cono? ____________________

____

e) Revisen brevemente cómo se justifica la fórmula del volumen de las pirámides rectas. Utilicen la información anterior y respondan.

¿Cómo se obtiene el volumen de un cono recto? ____________________

____

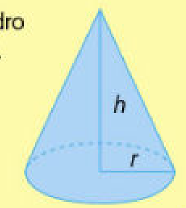
◆ **Concluyan, con ayuda del profesor, sus observaciones y escriban una expresión algebraica con la que calculen el volumen de un cono. Utilicen la idea de aproximar la forma del cono mediante las pirámides que aumentan el número de lados.**

Consolido mis competencias

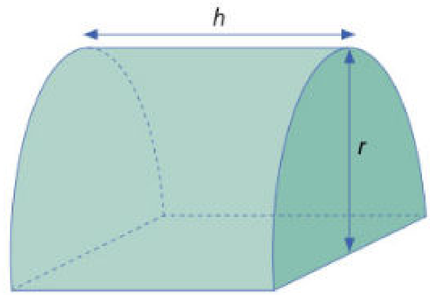
Actividad 11. Lee, en equipo, la información y calculen el volumen de los cuerpos.

Formalización. El **volumen de un cono** es la tercera parte del volumen de un cilindro con las mismas medidas de base y altura. Esto se sintetiza con la siguiente fórmula.

$$\text{Volumen del cono} = \frac{\text{área de la base} \times \text{altura}}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$



a) Analicen las medidas del cuerpo.



$h = 4.5$ m $\quad r = 1.5$ m

Volumen: ____________________

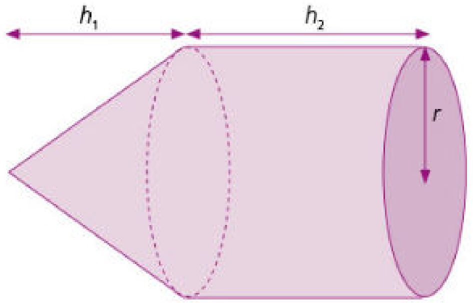
TIC Entra a www.redir.mx/matfort3-223 y analiza los ejemplos planteados. Escribe, en el cuaderno, una comparación entre estas escenas y lo que hiciste en las lecciones de conos y cilindros.

- Expliquen su procedimiento de resolución.

____

____

b) Analicen las medidas del cuerpo.



$h_1 = 3$ m $\quad h_2 = 4$ m $\quad r = 2.5$ m

Volumen: ____________________

- Expliquen su estrategia de resolución. ____________________

____

____

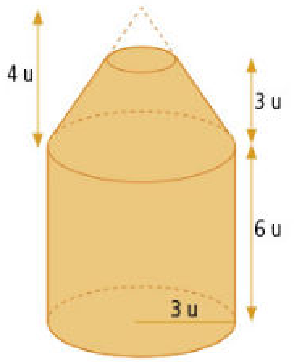
c) Observen el cuerpo geométrico de abajo, lleven a cabo lo que se les indica.

- Escriban el nombre de los cuerpos geométricos que identifiquen. ____________________

¿Sabías que...
la sección de un cono comprendida entre su base y un plano que lo corta de forma paralela se llama **cono truncado**?

- Describan cómo calcularían el volumen del cono pequeño. ____________________
- Describan cómo calcularían el volumen del cono truncado. ____________________
- Obtengan los valores de las medidas necesarias para calcular el volumen total y anótenlas sobre la imagen.
- Completen la tabla, calculen el volumen de cada sección.

Nombre del cuerpo geométrico	Medidas de la base	Altura	Volumen



- Volumen total: ____________________

◆ Comenten con otro equipo las dificultades que encontraron al calcular el volumen y anótenlas. ____________________

◆ Corrijan, con el grupo y con ayuda del profesor, sus posibles errores.

5.4 Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos rectos

Estimo y calculo el volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

Cálculo mental

a) $\frac{10\pi}{5} + \frac{\pi}{2} =$ ____________
b) $\frac{2\pi}{10} + \frac{\pi}{10} =$ ____________
c) $2\pi + \frac{4\pi}{2\pi} =$ ____________
d) $\frac{3\pi}{6\pi} + \frac{3\pi}{2} =$ ____________

Activo mis competencias

Bosqueja los cuerpos geométricos y anota sus medidas. Calcula el radio de la base o la altura de cada uno, con dos decimales de precisión.

a) Antes de escribir las operaciones, describe de manera breve el procedimiento que seguirás en cada caso.

Cilindro

Volumen (V) = 36 cm³
Altura (h) = 3 cm

Radio de la base (r) = ____________

Procedimiento: ____________________

Cono

V = 44 dm³
r = 2 dm

h = ____________

Procedimiento: ____________________

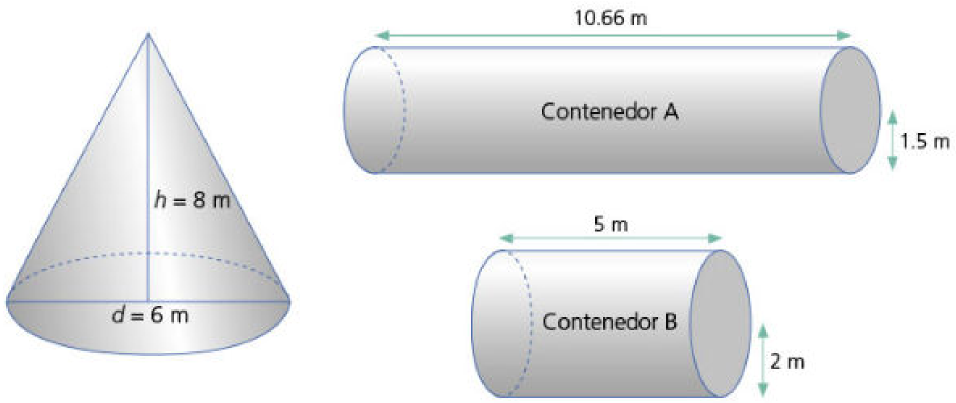
◆ Compara tu procedimiento con el que siguieron algunos compañeros de grupo. ¿Utilizaron la misma fórmula? ¿Tuvieron problemas con las unidades (dm o cm)? Si estimaras los datos, ¿cuál considerarías la mejor estimación? Explica.

Consolido mis competencias

Actividad 12. Analiza la información, los datos de cada imagen y resuelve.

a) Una almacenadora de semillas necesita transportar el contenido del silo que se representa con el cono, para ello utilizará alguno de los contenedores que se muestran. El encargado de la bodega debe elegir un contenedor con la misma capacidad que el cono.

- ¿Qué contenedor deberá utilizar? ______
- Explica tu solución. ______



b) Como parte de la cimentación de algunos puentes vehiculares se utilizan cilindros de concreto. Completa la información de la tabla. Considera que la base tiene 90 cm de diámetro y que $\pi = 3.14$.

- ¿Cómo varían la altura y el volumen del cilindro cuando el radio es constante? ______
- Grafica los valores y compara tus resultados.

Altura (m)	Volumen (m³)
3	
6	
9	
12	

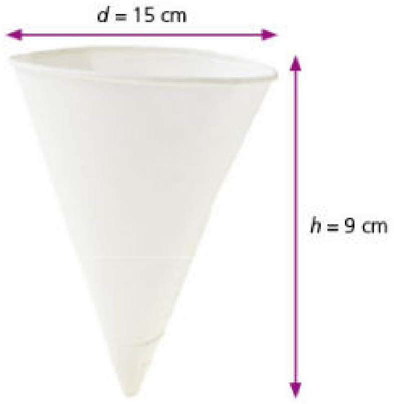
◆ Comenta con tus compañeros qué sucede cuando permanece constante la altura pero varía el radio.

Consolido mis competencias

Actividad 13. Completa la tabla y responde. Utiliza dos decimales para tus cálculos.

a) Una fábrica de conos de papel encerado planea sacar al mercado una nueva línea. Observa las medidas del cono. Utiliza $\pi = 3.14$.

Altura (cm)	Volumen (cm³)
15	
13	
11	
9	



- ¿Cómo varían la altura y el volumen del cono cuando el radio es constante?
- Grafica, en tu cuaderno, los valores y compara tus resultados.

b) En una tienda de helados requieren un cono para 320 ml que mida 12 cm de altura. Los dueños del local decidieron elaborar los barquillos. ¿Qué medidas debe tener el radio del sector circular y qué ángulo debe tener? Ten en cuenta que para hacer el cono se debe aumentar una ceja de 1 cm de ancho.

- Describe primero el procedimiento que seguirás y luego resuelve y anota las operaciones.

Radio: ______ Ángulo: ______ Generatriz: ______

◆ Traza el desarrollo plano en una cartulina y ármalo. Comprueba su capacidad. Compara tu procedimiento con el de algún compañero y contrasta los cálculos de cada uno.

Actividad 14. Resuelve, con una precisión de dos decimales.

a) Una granja tiene 10 silos cónicos de 6 m de alto y bases de 4.5 m (todo medido desde el interior) para almacenar granos. Al pasar la temporada de cosecha, cada silo se llena a su máxima capacidad, para vender posteriormente su contenido.

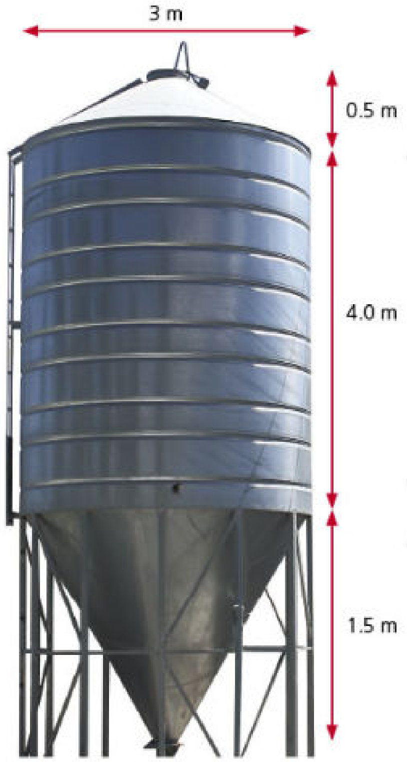
Una empresa que vende cereal directo al público compra el contenido de cinco silos llenos de avena. Si dicha empresa venderá el grano en recipientes cilíndricos de 5 cm de radio por 20 cm de altura, ¿cuántos recipientes necesitará para empaquetar todo el grano comprado?

Anota las operaciones. ______________________________

____

Necesitará ______________ recipientes.

b) La empresa compradora transporta el grano hasta su empaquetadora, donde se almacena en silos metálicos como el que se muestra.



- ¿Cuántos silos llenará con avena la compañía?

  Operaciones: ______________________________

  ____

  Respuesta: ______________________________

- Tras numerosas ventas, a la empresa le queda un silo con avena hasta el metro 3 (medido desde la base del silo). ¿Qué volumen de grano contiene?

- Describe tu procedimiento. ______________

  ____

  ____

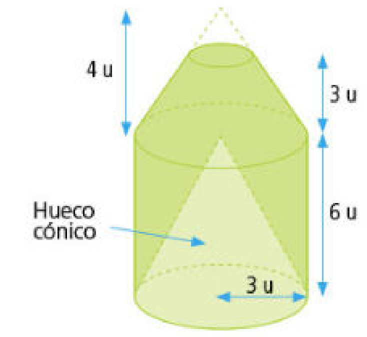
  ____

  Volumen: ______________

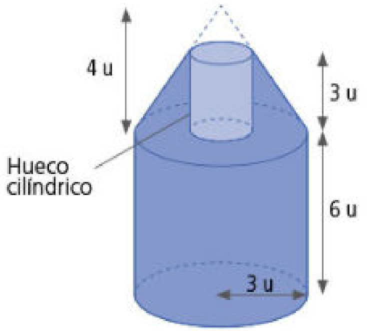
◆ Comenta la estrategia de solución con un compañero; revisen qué procedimiento simplifica la solución de cada inciso.

Actividad 15. Resuelve los problemas con un compañero.

a) Calculen el volumen de los cuerpos geométricos, para ello identifiquen primero los cuerpos más simples (cilindros y conos) que los componen, tanto sólidos como huecos. Anoten sus operaciones a un costado.

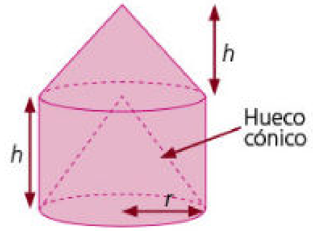


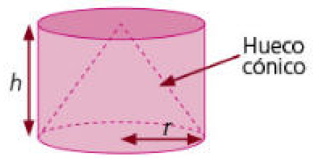
Volumen: ______________



Volumen: ______________

b) Determinen las fórmulas para calcular el volumen de cada cuerpo geométrico con base en las medidas proporcionadas (h, r). Argumenten las respuestas.





Fórmula: ______________ Fórmula: ______________

Justificación: ______________________________

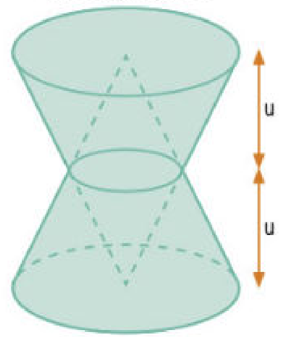
____

____

c) Calcula, de manera individual, el volumen de los cuerpos geométricos con la información que se te proporciona (aunque a primera vista no lo parezca, es suficiente).

Describe primero el procedimiento que emplearás. Anota todas las operaciones.

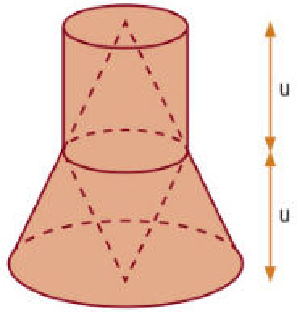
Volumen de cualquier cono grande: 8 u³



Procedimiento: ____________________

Volumen: ____________

Volumen del cono grande: 8 u³



Procedimiento: ____________________

Volumen: ____________

Para que practiques el cálculo del volumen de conos y cilindros, resuelve los ejercicios de www.redir.mx/matfort3-230.

TIC

- Compara tu procedimiento con el de un compañero. ¿Qué tipo de fórmula utilizaron en cada caso? ¿Fueron útiles las que hallaron en el inciso b)? ¿Qué tipo de problemas afrontaron para hallar las fórmulas del inciso b)? Coméntalos con tus compañeros de grupo.
- Regresa al problema de la sección "Activo mis competencias" y compara los procedimientos que escribiste con los que empleaste en el resto de las actividades. ¿Para alguna solución utilizaste cálculo mental? Explica en qué casos es mejor obtener una estimación y en cuál un cálculo preciso por escrito. Comenta tus ejemplos con tus compañeros de grupo.

5.5 Variación lineal o cuadrática

Analizo situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Cálculo mental

a) 3, 2, 1, …, a_n = ______
b) −8, −16, −24, …, a_n = ______
c) 5, 7, 9, …, a_n = ______
d) −4, −2, 0, …, a_n = ______
e) −2, −5, −8, …, a_n = ______

Activo mis competencias

Unos estudiantes llevaron a cabo un experimento para medir la caída libre de los cuerpos. Para ello, dejaron caer una pelota desde lo alto de un edificio y midieron la distancia recorrida por la pelota. En 0.2 s recorrió 0.2 m, en 0.4 s avanzó 0.8 m y en 0.6 recorrió 1.8 m. Responde las preguntas y justifica tus respuestas.

a) La pelota tardó en llegar al piso tres segundos, ¿desde qué altura fue lanzada? ______

b) Al llegar al piso, la pelota iba con una velocidad de 29.4 m/s, ¿cuál era su velocidad en el segundo 1.5? ______

c) ¿Qué velocidad tiene la pelota al caer? ¿Por qué? ______

d) ¿La distancia recorrida es proporcional al tiempo transcurrido? ¿Por qué? ______

e) ¿La velocidad de la pelota es proporcional al tiempo transcurrido? ¿Por qué? ______

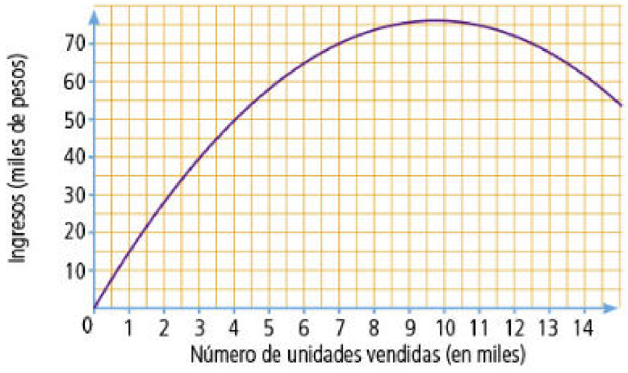
- Compara tus respuestas y procedimientos con los de tus compañeros. Expliquen cómo los resolvieron y discutan si fue necesario tener conocimientos de algún otro tema.

Consolido mis competencias

Actividad 16. **Trabaja en pareja. Lean la información y respondan. En caso necesario utilicen la calculadora.**

El sello discográfico Ruido Blanco desea saber cuántos discos de un grupo nuevo le conviene producir para obtener la ganancia máxima. Para ello hizo una investigación de mercado.

La gráfica muestra las estimaciones de los ingresos (I) por unidades vendidas. La estimación se proyectó descontando los gastos de promoción y distribución.



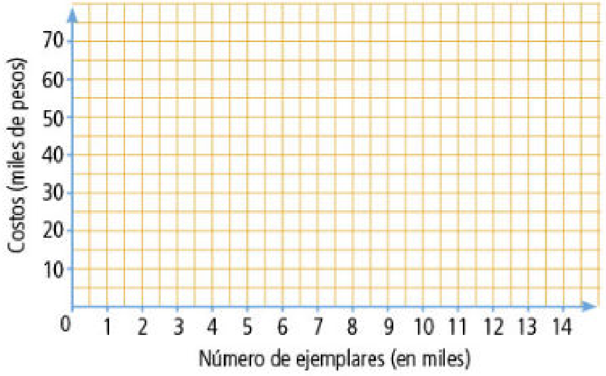
a) ¿Qué ecuación cuadrática se corresponde con la gráfica anterior? Justifiquen su respuesta.

I) $I = 0.8n^2 + 15.6n$ II) $I = -15.6n^2 + 0.8$ III) $I = -0.8n^2 + 15.6n$

Justificación. ____________________

b) ¿Dentro de qué valores debe mantenerse la oferta para obtener ingresos? __________

c) La empresa sabe que sus costos de producción C se calculan mediante la expresión $C = 4.8n + 10$, donde n es el número de unidades. Tracen su gráfica.



d) La empresa sabe que tiene costos fijos por un valor de \$10 000.00; señálenlo con rojo en la gráfica anterior.

e) Sin considerar el costo fijo, ¿cuánto le cuesta a la empresa producir cada disco?

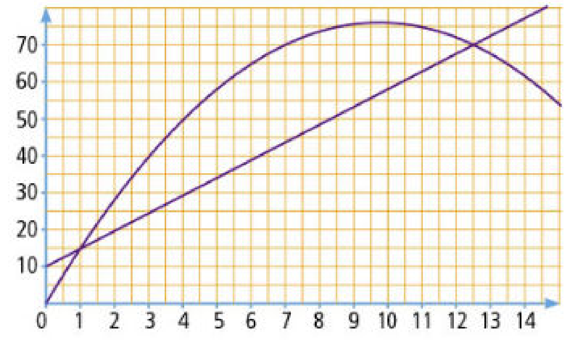
____

f) ¿Cuáles son los costos, los ingresos y las ganancias por producir y vender 0, 500, 1 000, 5 000, 10 000 y 15 000 discos? Elaboren una tabla y respondan en su cuaderno.

g) Determinen una expresión algebraica para obtener la ganancia para n unidades.

____

h) Tracen la gráfica de la ganancia. En los ejes escriban las unidades correspondientes.



i) ¿Cuántos discos deben venderse para que no haya pérdidas? __________

Justifiquen su respuesta. __________

j) La empresa concluyó que si vende 6 750 discos obtendrá la máxima ganancia.

¿Cuál será su ganancia? __________

k) ¿La ganancia tiene una variación lineal o cuadrática? __________

- **Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Compartan sus reflexiones sobre los diferentes procedimientos que utilizaron. Discutan acerca de la utilidad de plantear ecuaciones, graficar y tabular. Expliquen en qué condiciones es mejor utilizar cada procedimiento, ¿por separado o juntos? Además digan cómo se reconocen las variaciones lineal ycuadrática.**
- **Se estima que 7 de cada 10 discos que se compran en México son reproducciones ilícitas de su original. ¿Qué otros aspectos deberían considerarse en el estudio para determinar la ganancia? Analicen la situación y, con ayuda del profesor, obtengan una conclusión.**

TIC Visita www.redir.mx/matfort3-233, resuelve las actividades y explica si la gráfica resultante corresponde a una ecuación lineal o cuadrática.

Consolido mis competencias

Actividad 17. Regresa al problema de inicio y responde. Grafica, en tu cuaderno, los datos de la tabla en un mismo plano.

a) ¿Qué tipo de relación existe entre el tiempo y la velocidad? ____________

Tiempo (s)	Velocidad (m/s)	Distancia (m)
0	0	0
0.2		
0.4		
0.6		
0.8		
1.0		
1.2		
1.4		
1.6		
1.8		
2.0		
2.2		
2.4		
2.6		
2.8		
3.0	29.4	

b) ¿Cómo se llama la constante de proporcionalidad entre la velocidad y el tiempo? ¿Cuál es su valor?

____

c) Describe la gráfica de la velocidad. ____________

d) ¿Qué tipo de relación existe entre el tiempo y la distancia? ____________

e) Describe la gráfica de la distancia. ____________

f) ¿Desde qué altura fue lanzada la pelota? ____________

g) Plantea dos ecuaciones que describan las gráficas trazadas. ____________

◆ Compara tus respuestas con las que diste al inicio y corrígelas en caso de error. Discute, en grupo, las siguientes preguntas. ¿Las ecuaciones que obtuvieron en la última pregunta ya las habían estudiado antes? ¿Dónde? ¿Cómo les sirvió tener esos conocimientos para resolver el problema?

Para la próxima lección, construyan, en equipo, dos tetraedros de 4 cm de arista. Marquen sus caras con los números 1 a 4. Distingan con algún color.

5.6 Juegos de azar justos

Analizo las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Cálculo mental

a) 0.01% de 100 es ______
b) 0.2% de 550 es ______
c) 30.5% de 300 es ______
d) 25.5% de 660 es ______
e) 5.25% de 800 es ______

Activo mis competencias

Juega, en equipo, a la carrera de galgos.

a) Sigan las instrucciones.

- Utilicen dos tetraedros (**T1**, **T2**), marquen en las caras de cada uno: 1, 2, 3 y 4.
- Cada alumno debe elegir uno de los siete carriles donde avanzan los galgos.
- El alumno en turno lanza los tetraedros, observa las caras que queden boca abajo y suma los resultados.
- Coloquen una ficha (galgo) y avancen una casilla cuando su número de carril sea igual a la suma de los tetraedros.
- Gana el galgo que llegue a la décima casilla.

Carril \ Casilla	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dos										
Tres										
Cuatro										
Cinco										
Seis										
Siete										
Ocho										

b) Una vez concluido el juego, respondan.

- ¿Qué galgo ganó la carrera? ____________
- ¿Qué galgo quedó en último lugar? ____________
- Al inicio de la carrera, ¿todos los galgos tenían la misma probabilidad de ganar? ________ ¿Por qué? ____________

◆ Investiguen, en su grupo, qué galgo tuvo más partidas ganadas, comenten por qué sucede esto. ¿Se trata de un juego de azar justo? Expliquen.

Consolido mis competencias

Actividad 18. Completa la tabla del espacio muestral de la carrera de galgos.

T1 + T2	1	2	3	4
1	2			5
2			5	
3				7
4				

a) ¿Cuántas combinaciones se tienen para el evento seis? ______

b) ¿Qué evento tiene la misma probabilidad que el evento tres? ______ ¿Por qué? ______

c) ¿Qué evento tiene más probabilidad de ocurrir? ______

d) Considera el espacio muestral. ¿La carrera de galgos es un juego justo? ______ ¿Por qué? ______

Actividad 19. Analiza cada experimento y señala la apuesta con la que se tiene más probabilidad de ganar. Justifica tu respuesta en el cuaderno.

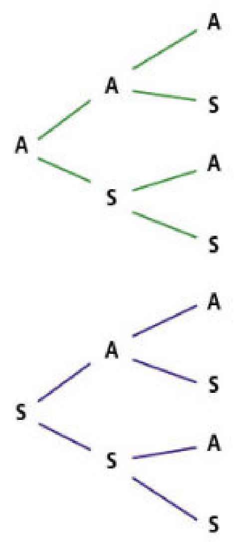
Experimento	Apuesta 1	Apuesta 2	¿Qué apuesta tiene más probabilidad de salir?	Justificación
Lanzar una moneda	sol	águila		
Lanzar un dado	dos	tres		
Lanzar dos monedas	dos águilas	un sol y un águila		
Lanzar dos dados	7 puntos	12 puntos		
Lanzar una moneda y un dado	sol y tres	águila y seis		

a) Analiza las parejas de apuestas en cada caso, ¿ambas tienen 50% de probabilidad de ganar? ______

- Comenta con tus compañeros el tipo de justificación que escribieron y concluyan cuál es la más convincente. Con base en esto definan qué es un juego de azar justo.

Consolido mis competencias

Actividad 20. Analiza el espacio muestral y responde.



a) ¿Cuál es el experimento? ______

b) ¿Cuántos resultados posibles existen en total? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres águilas? ______

d ¿Existe otro resultado que tenga la misma probabilidad? ¿Cuál? ______

e) ¿Saldrá lo mismo obtener dos águilas y un sol, que un águila y dos soles? ______

f) ¿Qué espacio muestral representa la tabla?

	A	S
A	(A, A)	(A, S)
S	(S, A)	(S, S)

g) ¿De qué otra manera puedes representar el mismo espacio muestral? ______

- Analiza, en grupo y con ayuda del profesor, la importancia que tiene la forma de representación al resolver una situación de cálculo de la probabilidad equiprobable y no equiprobable.

Actividad 21. Lee la información y efectúa lo que se pide.

En una escuela secundaria los tres grupos de tercer grado llevarán a cabo una rifa. El premio se otorgará al número que coincida con las dos últimas cifras del premio mayor de la Lotería Nacional para la Asistencia Pública.

Grupo	Boletos emitidos	Cantidad de números escritos en cada boleto
A	25	cuatro
B	50	dos
C	100	uno

a) Para tener mayor probabilidad de ganar, ¿de qué grupo conviene comprar un boleto?

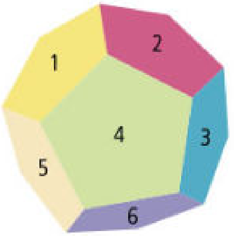
_______________ ¿Por qué? _______________

b) El precio del boleto del grupo **A** es de $10.00, ¿qué precios deberán tener los boletos de los grupos **B** y **C** para que la rifa sea justa? _______________

◆ **Analiza, en grupo, lo siguiente: si Julio compra dos boletos del grupo C y Yolanda adquiere uno del grupo A, ¿quién tiene mayor probabilidad de sacar un premio?**

Actividad 22. Analiza cada experimento y explica qué significa *equiprobable*.

Se lanza un dado con 12 caras, ¿qué eventos tienen la misma probabilidad?



a) Que caiga número impar o un número menor que cinco. ______

Explicación _______________

b) Que salga número par o que salga un múltiplo de tres. ______

Explicación _______________

◆ **Reúnete con un compañero y escriban, en su cuaderno, la definición de *evento equiprobable*.**

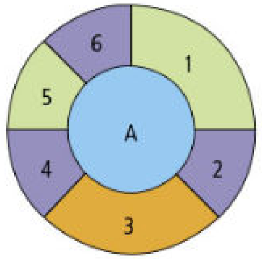
Visita www.redir.mx/matfort3-238 y juega a la carrera de camellos. Escribe el espacio muestral y explica si se trata de un juego justo.

TIC

◆ **Anoten un par de eventos que sean equiprobables y expliquen por qué lo son. Comparen sus ejemplos con los de otros compañeros y en grupo lleguen a una mejor definición.**

Actividad 23. Analiza el siguiente juego y explica qué significa *no equiprobable*.

Una diana tiene siete sectores (1, 2, 3, 4, 5, 6 y A) como se observa en la imagen. Completen cada línea con es equiprobable o no es equiprobable.



- El sector verde _______________ al sector azul.
- El sector anaranjado _______________ al sector A.
- El sector A _______________ al sector verde.

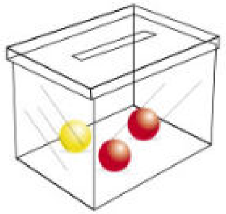
◆ **Reúnete con un compañero y define *evento no equiprobable*. Escriban un ejemplo.**

Consolido mis competencias

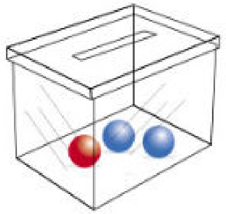
Actividad 24. Trabaja en pareja. Analicen las urnas, lean la información y respondan.

El juego consiste en sacar una esfera de cada urna y ver qué evento de la tabla tiene mayor probabilidad de salir.

Urna **A**



Urna **B**



a) Revisen qué pareja de eventos tiene mayor probabilidad de salir.

Evento		¿Qué evento tiene mayor probabilidad?
(roja, azul)	(roja, roja)	
(amarilla, azul)	(amarilla, roja)	
(roja, roja)	(amarilla, azul)	

b) Escriban, en la tabla, en orden descendente, la probabilidad de cada evento.

Evento	Probabilidad	Evento	Probabilidad

c) Expliquen, si los eventos del inciso a) son o no equiprobables. Utilicen su definición.

____

____

____

◆ **Escriban, en su cuaderno, si se trata de un juego de azar justo. Revisen, en grupo, si la equiprobabilidad de un evento es una condición para definir un juego de azar justo.**

Consolido mis competencias

Actividad 25. Trabaja con un compañero. Respondan en su cuaderno.

a) Jueguen a las tres tarjetas. Sigan las instrucciones.

- Depositen en una urna 10 tarjetas, cuatro negras y seis rojas.
- Uno de los jugadores saca tres tarjetas en forma consecutiva: si las tres son del mismo color gana dos puntos; pero si son combinación de colores, su contrincante gana un punto.
- Las tarjetas se devuelven a la urna en cada turno.
- Se juega alternadamente hasta que uno de los jugadores llegue a 25 puntos.

b) ¿Los jugadores tienen las mismas oportunidades de ganar? ¿Es un juego justo?

c) ¿Existe equiprobabilidad entre sacar tres tarjetas negras y tres rojas? ¿Por qué?

d) ¿Cómo calculan la probabilidad de obtener las tres tarjetas del mismo color?

Actividad 26. Lee la información y concluye qué sorteo es más justo.

En una ciudad se hacen dos sorteos semanales con las siguientes características.

Evento	Evento
Con una emisión de billetes numerados del 00001 al 60000	Con una emisión de billetes que constan de un horóscopo (de 12 posibles) y un número del 0000 al 9999

a) Al comprar sólo uno de sus billetes, ¿qué sorteo presenta mayor probabilidad de ganar?

¿Por qué? ______________________________

____

b) ¿Cómo calcularon la probabilidad de ganar en el sorteo del horóscopo? ______________

____

____

◆ Regresen al juego de los galgos de la sección "Activo mis competencias" y comenten, en grupo, las preguntas siguientes: ¿hay dos galgos que tengan la misma probabilidad de ganar?, ¿cómo cambiarían las reglas para que fuera un juego justo?

¿Qué tanto sé?

Selecciona la opción correcta.

1. En una universidad hay 25 500 alumnos inscritos, con una proporción de $\frac{8}{9}$ entre hombres y mujeres; es decir, hay 8 hombres por cada 9 mujeres inscritas. Si a y b representan la cantidad de hombres y mujeres, respectivamente, ¿qué sistema de ecuaciones corresponde a la situación y cuál es su solución?

   a) $a + b = 25\,000;\ 9a - 8b = 0$ $a = 11\,500;\ b = 14\,000$
   b) $a + b = 25\,000;\ 9a - 8b = 0$ $a = 12\,000;\ b = 13\,500$
   c) $a + b = 25\,000;\ 8a - 9b = 0$ $a = 12\,000;\ b = 13\,500$
   d) $a + b = 25\,000;\ 8a - 9b = 0$ $a = 11\,500;\ b = 14\,000$

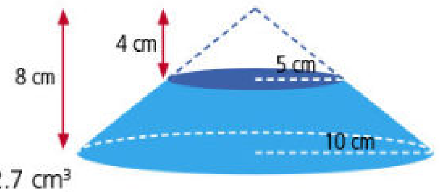
2. Se quiere encontrar dos números cuyo producto y suma son –100 y –15, respectivamente. ¿Qué sistema de ecuaciones corresponde a la situación?

   a) $xy = -100;\ y = -15 - x$
   b) $xy = -100;\ y = -15 + x$
   c) $\frac{x}{y} = -100;\ y = 15 - x$
   d) $\frac{x}{y} = -100;\ y = 15 + x$

3. ¿Qué figura se obtiene al hacer un corte perpendicular a la base de un cono recto?

   a) Una circunferencia.
   b) Una elipse.
   c) Una parábola.
   d) Una hipérbola.

4. A un cono de 10 cm de radio y 8 cm de altura se le quitó, en la parte superior, otro cono de 5 cm de radio y 4 cm de altura. ¿Qué volumen tiene el cuerpo resultante? (Considera $\pi = 3.14$).



   a) 837.3 cm³
   b) 732.7 cm³
   c) 418.7 cm³
   d) 104.6 cm³

5. Se tienen dos cilindros semejantes con razón 3 a 1; es decir, las medidas del radio y la altura del grande son el triple que las del pequeño. ¿Qué razón guardan los volúmenes de los cilindros?

   a) 27 a 1; es decir, el volumen del cilindro grande es veintisiete veces el del pequeño.
   b) 9 a 1; es decir, el volumen del cilindro grande es nueve veces el del pequeño.
   c) 6 a 1; es decir, el volumen del cilindro grande es seis veces el del pequeño.
   d) 3 a 1; es decir, el volumen del cilindro grande es el triple que el del pequeño.

6. Un cono de 9 cm de altura tiene un volumen de 37.68 cm³. ¿Cuánto mide el radio de la base? (Considera $\pi = 3.14$).

a) 2 cm b) 2.05 cm c) 4 cm d) 4.19 cm

7. Una empresa de paquetería cobra, además de una tarifa base por el servicio, un monto extra proporcional al peso del paquete. La tabla de la derecha muestra cómo se relacionan el peso del paquete (x) y la cantidad total que se pagará (y). ¿Qué expresión algebraica corresponde a esta relación?

Peso (x)	Tarifa (y)
…	…
4 kg	$35.00
5 kg	$40.00
6 kg	$45.00
…	…

a) $y = 5 + 15x$ b) $y = 15x$

c) $y = 15 + 5x$ d) $y = 5x$

8. Se desea construir un invernadero rectangular con un perímetro de 441 m de manera que el lado largo mida el doble que el corto. Si x representa el lado largo, ¿qué ecuación corresponde al planteamiento anterior?

a) $6x = 441$ b) $2x = 441$

c) $3x = 441$ d) $x = 441$

9. ¿En qué juegos tiene ventaja algún jugador?

a) Esmeralda y Marcelina lanzan dos monedas. Esmeralda gana si salen dos soles o dos águilas; Marcelina, si salen caras distintas.
b) Julio y Ángel lanzan dos dados. Julio gana si la suma es 7; Ángel, si la suma es 2, 3, 11 o 12.
c) Rubén y Alejandra lanzan una moneda y un dado. Rubén gana si sale sol y un número menor que 4; Alejandra, si sale águila y un número mayor que 3.
d) Ana y Raymundo lanzan tres monedas. Ana gana si salen tres águilas o tres soles; Raymundo, si salen caras distintas.

10. Viridiana, Jaime y Adriana juegan a lanzar dos dados y con base en la suma de ambos, reciben cierta cantidad de fichas. Viridiana recibe fichas cuando la suma es 7; Jaime, cuando la suma es 4 y Adriana, cuando la suma es 12. ¿Cuántas fichas debe recibir cada uno para que el juego sea justo?

a) Viridiana, 1 ficha; Jaime, 3 fichas; Adriana, 6 fichas.
b) Viridiana, 1 ficha; Jaime, 2 fichas; Adriana, 6 fichas.
c) Viridiana, 6 fichas; Jaime, 3 fichas; Adriana, 1 ficha.
d) Viridiana, 6 fichas; Jaime, 2 fichas; Adriana, 1 ficha.

Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas con las del grupo y valídalas.

Desafío del bloque

Las palomitas de maíz

En un cine se venden los siguientes envases de palomitas.

Pregunta 1

- ¿Cuántas veces es más grande la capacidad del envase mediano comparada con la del chico? Explica tu respuesta.

Pregunta 2

- Completa la tabla. Considera que el envase grande corresponde a un cono al que se le quitó otro cono más pequeño.

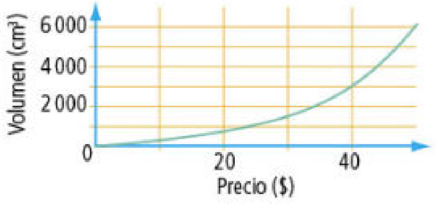
Tamaño	Forma	Volumen (cm³)	Precio ($)
chico	cono		30
mediano	cilindro		40
grande	cono trunco		50

Pregunta 3

- Explica por qué el volumen y el precio no cambian de manera proporcional.

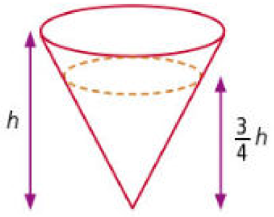
Pregunta 4

- La gráfica de la derecha relaciona el precio (p) de cada envase con su volumen (V). ¿Cómo se nota en la gráfica que la razón $\frac{\text{volumen}}{\text{precio}}$ es cada vez mayor, es decir, que al aumentar el tamaño del envase se obtienen más palomitas por cada peso?



Pregunta 5

- Matías y Julián compraron juntos el envase chico y acordaron que cada quien comería la mitad. Julián comió primero su parte y dejó las palomitas a $\frac{3}{4}$ de la altura del cono. Explica si Julián comió la cantidad acordada, más de lo que le correspondía o menos.



Al terminar, efectúa la autoevaluación del bloque 5 en la página 249.

Al concluir cada bloque, te invitamos a autoevaluarte. Ésta es una magnífica oportunidad para reflexionar sobre tu avance en la adquisición de conocimientos y habilidades, así como para reconocer la evolución de tus actitudes hacia el aprendizaje y el trabajo colaborativo.

En la primera parte valorarás tus avances en los conocimientos y habilidades relativas a los contenidos de cada bloque.

Lee cada oración y evalúa lo que hiciste mientras trabajabas ese contenido; por ejemplo, si se te dificultó, si ayudaste a tus compañeros, si comprendiste unos conceptos pero tienes dudas en otros.

En la segunda parte, te enfocarás en lo logrado respecto a las actitudes y valores que demuestras al trabajar con las matemáticas. Ten presente que desarrollas las actitudes de manera continua a cada bimestre y, en general, a lo largo de la vida.

Por último, te proponemos que reflexiones sobre tus estrategias de aprendizaje. Las preguntas están pensadas para que identifiques tus fortalezas y debilidades; al hacerlo, mejorarás en aspectos que influyen en el logro de un aprendizaje significativo.

Anota una ✓ en la opción que se adecua a tu nivel de desempeño en este bloque.
Recuerda que, si resuelves esta actividad con honestidad, obtendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Conocimientos y habilidades	Nivel de desempeño			
	Explico a otros o los ayudo.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Resuelvo problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas.				
Trazo figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y analizo sus propiedades.				
Identifico las propiedades de las figuras congruentes o semejantes.				
Uso los criterios de congruencia y semejanza de triángulos.				
Interpreto representaciones gráficas, tabulares y algebraicas, que corresponden a una misma situación.				
Identifico las representaciones gráficas, tabulares y algebraicas que corresponden a una relación de proporcionalidad.				
Represento relaciones de variación cuadrática por medio de tablas y expresiones algebraicas.				
Interpreto y uso la escala de la probabilidad.				
Identifico las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.				
Explico la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.				
Diseño una encuesta o un experimento y represento los resultados.				
Identifico la población de estudio en una encuesta o un experimento. Interpreto los datos de una muestra.				
Actitudes hacia el aprendizaje y el trabajo colaborativo	**Nivel de desempeño**			
	Siempre	Con frecuencia	Pocas veces	Nunca
Utilizo la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.				
Aplico el razonamiento matemático para la resolución de problemas personales.				
Formulo explicaciones y muestro mis soluciones al trabajar con mis compañeros de grupo.				
Comparto e intercambio ideas acerca de los procedimientos seguidos y los resultados obtenidos al resolver problemas matemáticos.				
Tengo un concepto positivo de mí mismo como usuario de las matemáticas				

Para concluir tu autoevaluación, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.
¿En qué contenidos específicos aún tengo dificultades? ¿Qué acciones emprenderé para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumiré para desarrollar el hábito del razonamiento matemático?
¿Qué estrategias de estudio me han sido más útiles?
Considerando mi autoevaluación y mi trabajo durante este bloque, me califico globalmente con: ____________

Anota una ✓ en la opción que se adecua a tu nivel de desempeño en este bloque.
Recuerda que, si respondes con honestidad, tendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Conocimientos y habilidades	Nivel de desempeño			
	Explico a otros o los ayudo.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Uso ecuaciones cuadráticas para modelar diversas situaciones.				
Resuelvo ecuaciones cuadráticas mediante la factorización.				
Identifico las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.				
Elaboro diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.				
Interpreto las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se trazan a partir de los lados de un triángulo rectángulo.				
Uso el teorema de Pitágoras para resolver problemas.				
Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).				
Interpreto y uso la escala de la probabilidad.				
Actitudes hacia el aprendizaje y el trabajo colaborativo	Nivel de desempeño			
	Siempre	Con frecuencia	Pocas veces	Nunca
Utilizo la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.				
Aplico el razonamiento matemático para la resolución de problemas personales.				
Formulo explicaciones y muestro mis soluciones al trabajar con mis compañeros de grupo.				
Comparto e intercambio ideas acerca de los procedimientos seguidos y los resultados obtenidos al resolver problemas matemáticos.				
Tengo un concepto positivo de mí mismo como usuario de las matemáticas.				

Para completar tu autoevaluación, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.
¿En qué contenidos específicos aún tengo dificultades?
¿Qué acciones emprenderé para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumiré para desarrollar el hábito del razonamiento matemático?
¿Qué estrategias de estudio me han sido más útiles?
Considerando mi autoevaluación y mi trabajo durante este bloque, me califico globalmente con: ____________

Anota una ✓ en la opción que se adecua a tu nivel de desempeño en este bloque.
Recuerda que, si respondes con honestidad, obtendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Conocimientos y habilidades	Nivel de desempeño			
	Explico a otros o los ayudo.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas por medio de la fórmula general.				
Aplico los criterios de congruencia y semejanza de triángulos para resolver problemas.				
Resuelvo problemas geométricos mediante el teorema de Tales.				
Aplico la semejanza para trazar figuras homotéticas.				
Interpreto y elaboro gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.				
Interpreto y elaboro gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.				
Calculo la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).				
Actitudes hacia el aprendizaje y el trabajo colaborativo	Nivel de desempeño			
	Siempre	Con frecuencia	Pocas veces	Nunca
Utilizo la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.				
Aplico el razonamiento matemático para la resolución de problemas personales.				
Formulo explicaciones y muestro mis soluciones al trabajar con mis compañeros de grupo.				
Comparto e intercambio ideas acerca de los procedimientos seguidos y los resultados obtenidos al resolver problemas matemáticos.				
Tengo un concepto positivo de mí mismo como usuario de las matemáticas.				

Para completar tu autoevaluación, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.
¿En qué contenidos específicos aún tengo dificultades?
¿Qué acciones emprenderé para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumiré para desarrollar el hábito del razonamiento matemático?
¿Qué estrategias de estudio me han sido más útiles?
Considerando mi autoevaluación y mi trabajo durante este bloque, me califico globalmente con: ____________

Anota una ✓ en la opción que se adecua a tu nivel de desempeño en este bloque.
Recuerda que, si resuelves esta actividad con honestidad, obtendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Conocimientos y habilidades	Nivel de desempeño			
	Explico a otros o los ayudo.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Obtengo una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.				
Analizo las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo.				
Elaboro desarrollos planos de conos y cilindros rectos.				
Analizo las relaciones existentes entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa, y el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente.				
Analizo las relaciones existentes entre los ángulos agudos y los cocientes de los lados de un triángulo rectángulo.				
Utilizo las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente, para resolver problemas.				
Calculo y analizo la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal.				
Identifico la pendiente de la recta que representa un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal.				
Mido la dispersión de un conjunto de datos e identifico las diferencias entre la "desviación media" y el "rango".				
Actitudes hacia el aprendizaje y el trabajo colaborativo	Nivel de desempeño			
	Siempre	Con frecuencia	Pocas veces	Nunca
Utilizo la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.				
Aplico el razonamiento matemático para la resolución de problemas personales.				
Formulo explicaciones y muestro mis soluciones al trabajar con mis compañeros de grupo.				
Comparto e intercambio ideas acerca de los procedimientos seguidos y los resultados obtenidos al resolver problemas matemáticos.				
Tengo un concepto positivo de mí mismo como usuario de las matemáticas.				

Para completar tu autoevaluación, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.
¿En qué contenidos específicos aún tengo dificultades?
¿Qué acciones emprenderé para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumiré para desarrollar el hábito del razonamiento matemático?
¿Qué estrategias de estudio me han sido más útiles?
Considerando mi autoevaluación y mi trabajo durante este bloque, me califico globalmente con: ____________

Anota una ✓ en la opción que se adecua a tu nivel de desempeño en este bloque.
Recuerda que, si resuelves esta actividad con honestidad, obtendrás una valoración más objetiva de ti mismo.

Conocimientos y habilidades	Nivel de desempeño			
	Explico a otros o los ayudo.	Lo hago solo.	Lo hago con ayuda de otros.	Necesito ayuda del profesor.
Resuelvo problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones.				
Formulo problemas a partir de una ecuación dada.				
Analizo las secciones que se obtienen al cortar un cilindro o un cono recto.				
Calculo las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.				
Diseño las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.				
Estimo y calculo el volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.				
Analizo situaciones problemáticas en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.				
Analizo las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo.				
Actitudes hacia el aprendizaje y el trabajo colaborativo	Nivel de desempeño			
	Siempre	Con frecuencia	Pocas veces	Nunca
Utilizo la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.				
Aplico el razonamiento matemático para la resolución de problemas personales.				
Formulo explicaciones y muestro mis soluciones al trabajar con mis compañeros de grupo.				
Comparto e intercambio ideas acerca de los procedimientos seguidos y los resultados obtenidos al resolver problemas matemáticos.				
Tengo un concepto positivo de mí mismo como usuario de las matemáticas.				

Para completar tu autoevaluación, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.
¿En qué contenidos específicos aún tengo dificultades?
¿Qué acciones emprenderé para mejorar mi desempeño?
¿Qué actitudes asumiré para desarrollar el hábito del razonamiento matemático?
¿Qué estrategias de estudio me han sido más útiles?
Considerando mi autoevaluación y mi trabajo durante este bloque, me califico globalmente con: ____________

Ángulo de inclinación de una recta: es el ángulo más pequeño que forman la recta y el eje horizontal del plano cartesiano.

Cateto: lado que forma el ángulo recto de un triángulo rectángulo.

Centro de rotación: punto fijo alrededor del cual rota una figura.

Criterio de congruencia para triángulos: conjunto de condiciones suficientes para asegurar que dos triángulos son congruentes; por ejemplo, el criterio LLL (si dos triángulos tienen tres lados iguales, entonces son congruentes).

Criterio de semejanza para triángulos: conjunto de condiciones suficientes para asegurar que dos triángulos son semejantes; por ejemplo, que los triángulos tengan dos ángulos correspondientes iguales.

Desarrollo plano: conjunto de figuras planas que, al pegarlas, forman un cuerpo geométrico; por ejemplo, el desarrollo plano de un cilindro consta de dos círculos y un rectángulo (cara lateral).

Desviación: diferencia entre un dato numérico y el promedio del conjunto.

Desviación media: promedio de las desviaciones de los datos de un conjunto numérico.

Ecuación de primer grado: ecuación en la que el exponente más grande al que aparece elevada la variable es 1; por ejemplo, $4x + 5 = 8x - 3$.

Ecuación de segundo grado: ecuación en la que el exponente más grande al que aparece elevada la variable es 2; por ejemplo, $3x^2 + 5x = 2x^2 - 8$.

Ecuación de segundo grado incompleta: cuando en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ alguno de los coeficientes b o c, o ambos, son iguales a cero, se dice que es incompleta.

Espacio muestral: conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Evento compuesto: resultado de un experimento aleatorio que puede ocurrir de dos o más maneras distintas; por ejemplo, obtener número par al lanzar un dado.

Evento simple: resultado de un experimento aleatorio que sólo se consigue de una forma; por ejemplo, obtener 5 al lanzar un dado.

Eventos complementarios: dos eventos de un experimento aleatorio que abarcan todo el espacio muestral, pero no comparten elementos comunes. Las probabilidades de dos eventos complementarios siempre suman 1.

Eventos independientes: eventos de un experimento aleatorio en los que la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de que el otro suceda.

Eventos mutuamente excluyentes: eventos de un experimento aleatorio que, al no tener elementos en común, no ocurren simultáneamente.

Factorizar: reescribir una expresión algebraica o aritmética como producto de dos o más factores; por ejemplo, $x(x^2 + 1)$ es una factorización de $x^3 + x$.

Figuras congruentes: figuras con la misma forma y tamaño, es decir, sus lados y ángulos correspondientes miden igual.

Figuras homotéticas: figuras semejantes con lados correspondientes paralelos en las que las rectas que unen vértices correspondientes coinciden en un punto (el centro de homotecia).

Figuras semejantes: figuras con forma igual pero no necesariamente con el mismo tamaño, es decir, sus ángulos correspondientes miden lo mismo, aunque las medidas de sus lados correspondientes suelen diferir.

Forma general de la ecuación de segundo grado: ecuación de segundo grado en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado: las soluciones de una ecuación cuadrática escrita en la forma general se obtienen sustituyendo los valores de a, b y c en la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Generatriz: segmento recto más corto que une el vértice de un cono con la circunferencia de la base. En el caso de un cono de revolución, corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo que se giró para formar el cono.

Hipotenusa: lado más largo de un triángulo rectángulo.

Inverso aditivo: el inverso aditivo de un número es el opuesto de ese número. La suma de un número y su inverso aditivo siempre es cero, es decir, $x + (-x) = 0$.

Inverso multiplicativo: es el recíproco de un número dado. El producto de un número y su inverso multiplicativo siempre es 1, es decir, $x(\frac{1}{x}) = 0$.

Rango: diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo en un conjunto de datos numéricos.

Razón de cambio: cociente entre el cambio de la variable x y el cambio de la variable y de una relación numérica. En el caso de las ecuaciones de primer grado, la razón de cambio siempre coincide con la pendiente de la recta.

Razón trigonométrica: cociente o relación entre los lados de un triángulo rectángulo. Las tres razones trigonométricas más comunes son seno, coseno y tangente.

Sección cónica: curva que se obtiene al hacer cortes rectos a un cono. Las secciones cónicas son la parábola, la elipse y la hipérbola.

Segmentos congruentes: aquellos segmentos con la misma longitud.

Sólido de revolución: cuerpo que se genera al girar una figura plana alrededor de un eje; por ejemplo, un cilindro se obtiene al girar un rectángulo tomando uno de sus lados como eje.

Solución de una ecuación: valor de la incógnita que hace verdadera la igualdad.

Valor de una expresión: número que se obtiene al sustituir uno o varios números en lugar de una o más variables de una expresión; por ejemplo, al sustituir 2 en el lugar de x en $7x + 5$ se obtiene 19.

PARA EL ALUMNO

Coto, Alberto, *Entrenamiento mental*, Madrid, Edaf, 2007.

Gonick, Larry y Smith Woollcott, *La estadística en cómic*, Cataluña, Zendrera Zariquiey, 2002.

Guedj, Denis, *El teorema del loro. Novela para aprender matemáticas*, Barcelona, Anagrama, 2002.

Magnus, Hanz, *El diablo de los números*, Madrid, Siruela, 1998.

Parker, Steve, *Cuerpo Humano*, México, Santillana, 2008.

Parisi, Anna, *Alas, manzanas y catalejos*, Barcelona, Oniro, 2005.

Perero, Mariano, *Historia e historias de matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.

Sagan, Carl, *Cosmos*, Barcelona, Planeta, 1999.

Sardar, Ziauddin, Jerry Ravetz y Boris van Loon, *Matemáticas. Una guía gráfica*, Barcelona, Paidós, 2011.

PARA EL ALUMNO (BIBLIOTECA DE AULA)

Andradas, Carlos, *Póngame un kilo de matemáticas*, Madrid, SEP-Ediciones SM, 2004.

Cerasoli, Anna, *La sorpresa de los números: un viaje al fascinante universo de las matemáticas*, México, SEP-Ediciones Maeva, Serie: Espejo de Urania, 2007.

De la Peña, José Antonio, *Números para contar, medir, crear y soñar*, México, SEP-Editorial Santillana, Serie: Astrolabio, 2006.

De Régules, Sergio, et. al., *El piropo matemático: de los números a las estrellas*, México, SEP-Lectorum, Serie: Espejo de Urania, 2003.

Jouette, André, *El secreto de los números*, México, SEP-Ediciones Robinbook, Serie: Espejo de Urania, 2004.

Poskitt, Kjartan, *Esa condenada mala suerte*, México, SEP-Abrapalabra Editores, Serie: Espejo de Urania, 2005.

Perelman, Yakov, *Matemáticas recreativas*, México, SEP-Martínez Roca, Serie: Espejo de Urania, 2003.

Reyes Coix, Luis Gerardo, *Del punto al cuerpo*, México, SEP-Oxford University Press, Serie: Astrolabio, 2007.

Ruiz, Concepción y Sergio de Régules, *Crónicas algebraicas*, México, SEP-Ediciones Santillana, Serie: Espejo de Urania, 2002.

PARA EL ALUMNO (BIBLIOTECA ESCOLAR)

Anno, Masaichiro, *El misterioso jarrón multiplicador*, México, SEP-Fondo de Cultura Económica, 2007.

Bosch, Carlos y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana a las incógnitas*, México, SEP-Editorial Santillana, Serie: Espejo de Urania, 2002.

Bosch, Carlos y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana a la incertidumbre*, México, SEP-Editorial Santillana, Serie: Espejo de Urania, 2002.

Lamm, Emma y Elena De Oteyza, *El álgebra es divertida*, México, SEP-Editorial Santillana, Serie: Espejo de Urania, 2009.

Marván, Luz María, *Andrea y las fracciones*, México, SEP-Editorial Santillana, Serie: Espejo de Urania, 2002.

Tahan, Malba, *El hombre que calculaba*, México, SEP-Limusa, 1992.

Enlaces web recomendados

Portal educativo. Conectando neuronas
http://www.portaleducativo.net/

Red Educativa Digital Descartes. Materiales didácticos interactivos para el aprendizaje de las matemáticas
proyectodescartes.org/EDAD/

Universo matemático. Radio y Televisión españolas
www.rtve.es/alacarta/videos/universo-matematico/

Desafíos matemáticos El País. Retos y acertijos matemáticos
http://sociedad.elpais.com/sociedad/2011/07/12/actualidad/1310421608_850215.html

Cuéntame. Página del Instituto Nacional de Estadística y Geografía
http://cuentame.inegi.org.mx/

Matemáticas divertidas. Juegos interactivos
http://www.matematicasdivertidas.com/Zonaflash/zonaflash.html

Webs interactivas de matemáticas. Simulaciones interactivas con GeoGebra
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/elpais.htm

Ventana educativa. Página que difunde videos de la televisión educativa
http://ventana.televisioneducativa.gob.mx/educamedia/telesecundaria/3/30/1/0

PARA EL DOCENTE

Ávila, Alicia, directora, *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas*, México, SEP-Subsecretaría de Educación Básica y Normal-Dirección General de Investigación Educativa, 2004.

Brousseau, Guy, "Educación y didáctica de las matemáticas", en *Educación Matemática*, abril de 2000, vol. 12, núm. 1, pp. 5-38.

INEE, *PISA para docentes. La evaluación como oportunidad de aprendizaje*, México, INEE-SEP, 2005.

Peña, José Antonio de la, compilador, *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*, México, Siglo XXI, 2002.

Perrenoud, Philippe, *Diez nuevas competencias para enseñar*, Barcelona, Graó, 2004.

Piaget, Jean *et al.*, "Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia", en *La enseñanza de las matemáticas*, Madrid, Aguilar, 1968, pp. 3-28.

Saint-Onge, Michel, *Yo explico pero ellos… ¿aprenden?*, México, Ediciones Mensajero, 2001.

Stacey, Kaye y Susie Groves, *Resolver problemas: estrategias*, Madrid, Narcea Ediciones, 1999.

Enlaces web recomendados

That quiz. Herramienta didáctica de apoyo para elaborar exámenes
https://www.thatquiz.org/es/

Red Educativa Digital Descartes. Materiales didácticos interactivos para el aprendizaje de las matemáticas
proyectodescartes.org/EDAD/

DivulgaMAT. Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española
http://www.divulgamat.net/

Telesecundaria. Página de la SEP con recursos educativos que ayudan al docente
http://www.telesecundaria.sep.gob.mx/

Sitio de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
www.ommenlinea.org/

Plan Ceibal. Sitio uruguayo especializado en promover recursos educativos para docentes y estudiantes
http://www.ceibal.edu.uy/

CONSULTADA

Alarcón, Jesús *et al.*, *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria*, México, SEP, 2000.

Collins, William *et al.*, *Álgebra 1*, EUA: Glencoe/McGraw-Hill, 1998.

Ifrah, Georges, *Las cifras*, Madrid, Alianza Editorial, 1987.

Masini, Giancarlo, Juana Bignozzi y Alessandro Faedo, *El romance de los números*, Barcelona, Círculo de Lectores, 1980.

Mochón, Simón, Teresa Rojano y Sonia Ursini, *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo*, México, SEP-ILCE, 2000.

Newman, James, *Sigma. El mundo de las matemáticas*, Barcelona, Grijalbo, 1976.

SEP, *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria*, México, SEP, 2000.

_____, *Plan de Estudios 2011. Educación Básica*, México, SEP, 2011.

_____, *Programas de Estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas*, México, SEP, 2011.

Zubieta, Gonzalo *et al.*, *Geometría dinámica*, México, SEP-ILCE, 2000.

Créditos iconográficos

© Thinkstock: pp. 14, 50, 51, 52, 57, 68, 106, 108, 112, 127, 128, 130, 134, 140, 141, 148, 164, 179, 192, 208, 228. © Archivo SM: pp. 67, 69, 78, 111, 189, 191. © Carlos Vargas: pp. 105, 133, 156, 159, 171.

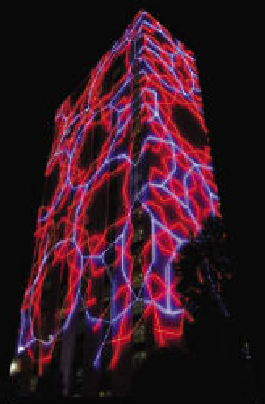
Fortalezco mis competencias 3. se terminó de imprimir en abril de 2015,
en Quad Graphics Querétaro, S.A. de C.V.,
Industrial la Cruz, C. P. 76240, Villa del Marqués, Qro.

162491

sm

Este libro incluye una amplia variedad de **recursos didácticos** para hacer realidad en las aulas la aplicación del enfoque de enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria. Es por ello que en **www.secundaria-sm.com.mx** podrá registrarse para que le asignemos un código con el que usted accederá a **contenido digital** y a la **guía didáctica** que, además del **solucionario** del libro, le proporciona **orientaciones didácticas** para el tratamiento de los contenidos, así como **recursos de evaluación** (reactivos de opción múltiple), **avance programático** editable y herramientas para el **seguimiento del aprendizaje** de sus alumnos.

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA



9 786072 410176

www.ediciones-sm.com.mx